



Un acercamiento a la hoja de cálculo en 5.º de Primaria

En el número de abril del año pasado incluimos un artículo invitado dedicado a experiencias docentes en Educación Primaria. La experiencia fue muy positiva y, desde el número anterior, se ha añadido al Boletín una sección específica dedicada a este nivel educativo, que consideramos esencial en la formación matemática del alumnado.

En esta ocasión presentamos una experiencia llevada a cabo en el *Colegio Compañía de María* en Almería, en la que el alumnado adquiere el conocimiento de conceptos matemáticos utilizando complementariamente herramientas ofimáticas.

(Artículo completo en la página 7)

The killer problems

Resumen



Universidad Estatal de Moscú

Se decía del famoso divulgador de las matemáticas, Martin Gardner, que había convertido a muchos niños en matemáticos y a muchos matemáticos en niños. Sus columnas de pasatiem-

pos en la revista *Scientific American* son legendarias.

En nuestra sección de pasatiempos y curiosidades se presentan cuestiones que van en esa dirección, el fomento del interés en las matemáticas a través de problemas concretos.

En este número, se presenta un hecho real —que no vamos a desvelar en esta entrada— de gran interés, tanto por su contenido matemático como por el contexto en el que se desarrolla.

(Ver artículo en la página 16)

Editorial: 50 números no son nada

Decía Carlos Gardel en su famosísimo tango, *Volver*, que «veinte años no son nada». Pues bien, este es el número 50 del Boletín y no nos falta mucho para los 20 años —llevamos ya 17—.

Queremos aprovechar esta efeméride para escribir este editorial de agradecimiento. Cuando comenzamos esta aventura allá por el año 2007 ni en nuestros planteamientos más optimistas podríamos pensar que íbamos a estar en esta situación.

Esto ha sido posible gracias al trabajo, totalmente altruista, de muchas personas, que han dedicado su tiempo y esfuerzo a que esta revista saliera adelante. Sin su trabajo hubiera sido totalmente imposible.

Una de las cosas de las que nos sentimos más satisfechos es la de acoger en el Boletín a personas enamoradas de las matemáticas de todos los ámbitos educativos: estudiantes, profesorado de secundaria, profesorado universitario y, en estos últimos números, incorporando a profesorado de primaria e infantil.

Seguimos con la misma ilusión del primer día y esperamos poder llegar, como mínimo, a ser centenarios.

Un millón de gracias a todas las personas que lo hacéis posible y a nuestros lectores por su fidelidad número tras número.

Actividades Matemáticas p. 2

Enseñanza Primaria p. 7

Enseñanza Secundaria p. 9

Concurso de problemas p. 11

Divulgación Matemática p. 12

Territorio Estudiante p. 24

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Entrega del premio del Boletín

El pasado 18 de enero se hizo entrega del premio del *Concurso de Problemas* del Boletín a Diego Haro Vicente en el *IES Juan Goytisolo* de Carboneras.



El estudiante premiado en el acto de entrega con su profesora María del Valle Raya y Fernando Reche

En el acto de entrega, Diego estuvo acompañado por sus compañeros de clase y por el profesorado de matemáticas del centro.

Como es habitual en estas ocasiones, se impartió una charla matemática a los estudiantes titulada *Las matemáticas en las series de televisión*, en la que participaron activamente y resultó muy instructiva.

LX Olimpiada Matemática Española

El Auditorio de la *Universidad de Almería* acogió el 19 de enero la fase local de la *LX Olimpiada Matemática Española* (OME) ¹, organizada por *Facultad de Ciencias Experimentales* en colaboración con la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME). El concurso, dirigido a estudiantes de Bachillerato (y excepcionalmente de cursos inferiores), tiene por objeto fomentar el talento matemático entre los jóvenes y favorecer a las disciplinas STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas).

En esta edición han participado 77 de estudiantes procedentes de 13 centros de la provincia de Almería, quienes han tenido que enfrentarse a diversos problemas de alto nivel matemático propuestos por la RSME y que son iguales en toda la comunidad andaluza. En esta ocasión han participado solo 17 chicas. El número de participantes chicas ha ido disminuyendo en las últimas Olimpiadas, desde el Boletín animamos a las chicas para invertir esta tendencia pues los grados en Matemáticas son ejemplo de paridad.

Los tres ganadores de esta fase local serán los representantes de nuestra provincia en la *VI Olimpiada Matemática Andaluza*, que se celebrará en la *Universidad de Almería* entre los días 23 y 25 de febrero y que determinará a los 12 estudiantes andaluces que participarán en la Fase Nacional de la OME, que tendrá lugar del 14 al 17 marzo en Calatayud (Zaragoza).

¹La inauguración puede verse en www.youtube.com/watch?v=W5QXgcJUVcQ.

Los seis primeros clasificados en la Olimpiada Nacional conformarán el equipo español que competirá en la *LXV Olimpiada Matemática Internacional*, a celebrar en Bath (Reino Unido) del 10 al 22 de julio. Además, de entre las medallas de oro de esta fase nacional, la Comisión de Olimpiadas de la RSME decidirá la composición del equipo que representará a España en la *XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, que tendrá lugar en Bolivia en el mes de septiembre.



Estudiantes realizando la prueba

En paralelo, las alumnas mejor clasificadas en las fases locales, hasta un máximo de 15, podrán participar en febrero en la prueba de selección del equipo español que representará a España en la *XIII Olimpiada Femenina Europea* (EGMO), que tendrá lugar del 11 al 17 de abril en Tskaltubo (Georgia).

4.º Workshop «Dos días de polinomios ortogonales»

El grupo de investigación *Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales* organizó los días 14 y 15 de diciembre en la *Universidad de Almería* el 4.º Workshop «Dos días de polinomios ortogonales».



Acto de inauguración del workshop

Enmarcado dentro de las actividades que el grupo realiza dentro de un proyecto financiado por el *Ministerio de*

Ciencia e Innovación, el encuentro ha reunido a 51 expertos internacionales con el objetivo de poner en común los últimos avances en la investigación sobre esta temática y mostrar el potencial de este campo científico.



Los homenajeados, Guillermo López y Andrei Martínez

El evento finalizó con una cena homenaje a Guillermo López Lagomasino, profesor de la *Universidad Carlos III*, y a Andrei Martínez Finkelshtein, profesor de la UAL, por su 75.º y 60.º aniversario, respectivamente ².

Semana de la Ciencia 2023

Del 13 al 17 de noviembre se celebró la *XXIII Semana de la Ciencia* de la UAL, organizada por el *Vicerrectorado de Investigación e Innovación*, a través de la OTRI.

El evento, dirigido a estudiantes de Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional, tiene como objetivo lograr una mayor comprensión social de la ciencia y una mejor apreciación del impacto que tiene sobre la actividad cotidiana y la mejora de la calidad de vida de las personas.

En esta edición se han desarrollado 29 actividades en un total de 95 sesiones, destinadas a 1500 estudiantes procedentes de 28 centros de enseñanzas preuniversitarias de toda la provincia.

Al tradicional «Café con ciencia» de inicio de la semana, le sucedieron talleres, charlas, juegos y experiencias interactivas de una gran variedad de ramas científicas.



El equipo Stat Wars

De ámbito matemático se realizó el taller *Stat Wars: La rebelión de los datos*, organizado por miembros del área de Estadística e Investigación Operativa del Departamento de Matemáticas y contó con la asistencia de alum-

nado del *IES Alhadra*, de Almería, y *Río Aguas*, de Sorbas.

El taller estuvo formado por una serie de charlas y concursos, con el objetivo de transmitir a los jóvenes la idea de que, aparte de ser una profesión de futuro, la Estadística es una herramienta imprescindible para resolver problemas de distintas disciplinas a las que hoy en día se enfrenta la sociedad.

IV Jornadas Científicas san Alberto

El 10 de noviembre la *Facultad de Ciencias Experimentales* comenzó la celebración de su patrón con la *IV Jornada Científica san Alberto*, una actividad en la que los investigadores galardonados con los *Premios de Investigación san Alberto 2023* expusieron brevemente sus trabajos.

En esta edición se han otorgado 10 premios de 250 euros y un diploma al solicitante para los artículos de investigación publicados en revistas de alto impacto Q1, distribuidos en los campos de conocimiento de Biotecnología, Ciencias Ambientales, Matemáticas y Química.



El galardonado Antonio Jiménez Vargas en un momento de su intervención

Uno de estos premios ha sido para Antonio Jiménez Vargas, catedrático de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas, por su artículo *On Composition Ideals and Dual Ideals of Bounded Holomorphic Mappings*, publicado en la revista *Results in Mathematics*.

XII Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales

La *Facultad de Ciencias Experimentales* celebró el 15 de noviembre el gran día de su patrón san Alberto Magno. La jornada comenzó con el *XII Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales*, dedicado a los jóvenes investigadores de la Facultad.

En esta decimosegunda edición se han expuesto 123 pósteres y se han repartido 11 premios en metálico de distintas cuantías. Los premiados en el campo de las matemáticas han sido Antonio Jesús Martínez Aparicio y Rubén Fiñana Aránega ³.

²Más información en w3.ual.es/GruposInv/Tapo/D2PO-2023/D2PO2023.html.

³Más información sobre el simposio en www2.ual.es/isimpos.



Exposición de pósteres

La festividad continuó con una conferencia impartida por la divulgadora científica Clara Grima, profesora de la Universidad de Sevilla. Bajo el título *Te creo y no te veo*, ofreció una interesante y divertida charla con la que hizo una apología del manejo de la incertidumbre ⁴.



Un momento de la conferencia

Entrega de premios mejor expediente y mejor TFG en matemáticas de la Facultad de Ciencias Experimentales



Foto de familia de los galardonados junto a miembros del equipo decanal de la Facultad

También dentro de las actividades de la celebración del patrón de la Facultad de Ciencias Experimentales, se

⁴La conferencia puede verse en www.youtube.com/watch?v=8JqcRbWjcxU.

entregaron los premios a los mejores expedientes correspondiente a la promoción de 2019–2023 del Grado en Biotecnología, Grado en Ciencias Ambientales, Grado en Matemáticas y Grado en Química.

Este reconocimiento en el grado en Matemáticas ha recaído en Álvaro Otero Sánchez. Además, dentro del convenio UAL-RSME, se hizo entrega del premio al mejor Trabajo Fin de Grado en Matemáticas a Cristina Martín Aguado por su trabajo titulado *Sumas de Darboux e integral de Riemann definidas en estructuras fractales*, dirigido por Miguel Ángel Sánchez Granero y codirigido por José Fulgencio Gálvez Rodríguez.

Entrega de las Becas UAL de Excelencia 2023

El 16 de octubre el Vicerrectorado de Estudiantes, Igualdad e Inclusión hizo entrega de las Becas UAL de Excelencia 2023 a estudiantes de nuevo ingreso y que continúan con sus estudios de Grado.



Acto de entrega de las becas

Cinco estudiantes del Grado en Matemáticas se han beneficiado de esta ayuda: Juan Francisco Cuevas Rodríguez, Carlos González Fernández, Lorena López Álvarez, Adrián López de Haro y Ángel Ramos Ortiz.

Entrega de premios IndalMat 2023



Foto de familia de los galardonados

El 16 de noviembre tuvo lugar la entrega de premios a los mejores calificados en el VIII Concurso de resolución de problemas matemáticos IndalMat. En esta edición, celebrada el 6 de octubre, se presentaron 450 estudiantes

pertenecientes a 31 centros educativos de toda la provincia.

En la categoría de 4.º de ESO las dos primeras posiciones han sido ocupadas por Alonso González y José Luis Haro, procedentes ambos del *IES Alyanub*, siendo el tercer clasificado Maximilian Antonio Schmeling, procedente del centro *Novaschool*.

En 1.º de Bachillerato los tres primeros clasificados

han sido, por este orden, Salvador García, del *IES Murgi*, Javier Villegas, del *IES Fuentesnueva*, y Miguel Montero, del *IES Murgi*. En cuanto a 2.º de Bachillerato, el primer clasificado ha sido Daniel Sánchez, del *IES Mediterráneo* de Garrucha, seguido de Ángel Jiménez, del *IES Azcona*, quedando en tercera posición Alejandro Casas, del *Colegio Agave* ⁵. ¡Enhorabuena!

Noticias matemáticas

Columnas de divulgación matemática

Los diarios almerienses *Diario de Almería* e *Ideal* publican periódicamente artículos de divulgación científica en colaboración con la *Facultad de Ciencias Experimentales*. Los relacionados con las matemáticas desde la publicación del último número del Boletín son:

- *50 años revolucionando la teoría de puntos críticos*, por José Carmona Tapia (30/11/2023).
- *ChatGPT: el nuevo profeta*, por Ana Devaki Maldonado (22/12/2023).

Día Internacional de las Matemáticas 2024

El 14 de marzo se conmemora el *Día Internacional de las Matemáticas* (IDM), efeméride para reivindicar la utilidad de las Matemáticas para mejorar distintos ámbitos de la vida y afrontar los retos actuales.



Logo del IDM 2024

El lema de este año es *Jugando con las matemáticas* (Playing with maths), un tributo a los juegos matemáticos, los acertijos y otras actividades de entretenimiento, así como para resaltar la importancia de jugar con las propias matemáticas, explorando, experimentando y descubriendo.

Siguiendo este tema, durante esa fecha tendrán lugar diferentes eventos de divulgación con el objetivo de crear y utilizar el juego para el aprendizaje de la Matemática.

El *Día Internacional de las Matemáticas* es un proyecto de la *Unión Matemática Internacional* y fue proclamado por la Conferencia General de la UNESCO en 2019. En muchos países ya se venía celebrando el 14 de marzo como el *Día de π* (3/14), fecha en el sistema anglosajón que coincide con la parte entera y los dos primeros decimales del valor de esta ilustre constante.

Más información en www.idm314.org.

Día Internacional de la mujer y la niña en la ciencia

El 11 de febrero se celebra el *Día internacional de la mujer y la niña en la ciencia*, una iniciativa de ámbito nacional para destacar el trabajo de las científicas, crear referentes femeninos en la ciencia, la ingeniería y la investigación, y promover una cultura de igualdad de género en estos campos.



Como en años anteriores, desde el *Vicerrectorado de Igualdad, Inclusión y Compromiso Social* de la UAL se están organizando diversas actividades de divulgación y concienciación, que se realizarán desde esta fecha hasta el 8 de marzo por los centros educativos de toda la provincia ⁶.

9.º Congreso Europeo de Matemáticas 2024

Del 15 al 19 de julio se celebrará en Sevilla la novena edición del *Congreso Europeo de Matemáticas* (9ECM), promovido por la *Sociedad Matemática Europea* con el apoyo de las universidades andaluzas y las sociedades matemáticas españolas.



Este congreso se celebra cada cuatro y sus líneas temáticas abordan tanto las líneas de investigación matemática en su amplitud como las relaciones con las empresas.

Entre sus actividades paralelas, se otorgarán los premios de la *European Mathematical Society*, los más prestigiosos de Europa en Matemáticas, contando con la presencia de los científicos más destacados en la materia a nivel internacional.

⁵La ceremonia de entrega de premios puede verse en www.youtube.com/watch?v=5ndzCsCVoDM.

⁶Más información en www.igualdad.ual.es/index.php/actividades/11febrero-dia-internacional-mujer-nina-ciencia-2024.

⁷Más información en www.ecm2024sevilla.com.

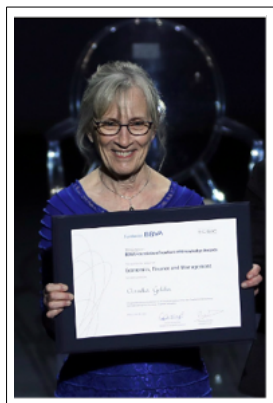
El plazo de inscripción ya se encuentra abierto, estableciéndose el 2 de abril como fecha límite para el envío de propuestas de pósteres y de comunicaciones ⁷.

Premio Nobel de Economía 2023 para Claudia Goldin

Nos hacemos eco del *premio Nobel de Economía* de interés para nuestros estudiantes del Doble Grado en Economía y Matemáticas.

La *Real Academia Sueca de las Ciencias* otorgó el pasado mes de octubre el *Premio Nobel de Economía* 2023 a la economista estadounidense Claudia Goldin «por haber avanzado en nuestra comprensión de los resultados de las mujeres en el mercado laboral».

En sus investigaciones, pioneras en el estudio de la economía con enfoque de género, Goldin se ha centrado en el mercado laboral femenino y las brechas salariales, siendo la primera en hacer una revisión de datos de 200 años sobre la participación de las mujeres en la fuerza laboral de Estados Unidos. Su estudio explica la brecha salarial entre mujeres y hombres por motivos educativos y por el nacimiento del primer hijo.



Claudia Goldin recibiendo el premio Nobel

Esta profesora de Harvard de 77 años se convierte así en la tercera mujer de la historia en recibir el prestigioso galardón dotado con 10 millones de coronas suecas (cerca de 862 000 euros), siendo, además, la primera en percibirlo en solitario.

El *Premio Nobel de Economía* es el único de los seis conocidos galardones cuya creación no fue voluntad de Alfred Nobel. Fue establecido en 1968 por una donación del *Banco Central de Suecia* a la *Fundación Nobel* por su tricentenario.

Se otorgó por primera vez en 1969 y desde entonces ha entregado un total de 55 galardones a 93 personas. Hubo

que esperar cuatro décadas para que el premio fuera otorgado por primera vez a una mujer, Elinor Ostrom, que lo compartió con Oliver E. Williamson.

Actividades de la FESPM

La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM), de la que es miembro la *SAEM Thales*, organiza las siguientes actividades:

- *XXIX Concurso Canguro Matemático* 2024, dirigido a estudiantes de Secundaria, Bachillerato y ciclos de Grado Medio o Superior. Se celebrará el próximo 21 de marzo en cada centro participante.
- *VI Olimpiada Matemática Nacional Alevín*, destinada al alumnado de tercer ciclo de Educación Primaria y organizada por la *Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»*. Se celebrará del 26 al 29 de junio en Madrid.
- *XXXIV Olimpiada Matemática Nacional Junior*, dirigida a estudiantes de 1.º y 2.º de ESO. Organizada por la *Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»* y tendrá lugar entre los días 14 y 18 de junio en Jarandilla de la Vera (Cáceres).
- *III Olimpiada Matemática Nacional Juvenil*, dirigida a estudiantes de 4.º de ESO y organizada por la *Sociedad Melillense de Educación Matemática*. Se celebrará en la última semana de junio en Melilla.
- *XXI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (21 JAEM). El lema de esta edición es *Matemáticas entre el mar y la montaña*. Se celebrará del 30 de junio al 3 de julio en Santander.

Más información en fespm.es.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: Michel Dubois-Violette, de la CNRS Université Paris-Saclay

(Francia); Alex Matsinkovsky, de la Universidad Northeasten de Boston, Massachusetts (Estados Unidos); Khalid Najhib, de la Escuela Nacional de Industria Mineral de Rabat (Marruecos); Ignacio Manuel Pelayo Melero, de la Universidad Politécnica de Cataluña; Juan Manuel Ribera Puchades, de la Universidad de Islas Baleares; y Fred Van Oystaeyen, de la Universidad de Antwerp (Bélgica).

Preguntas frecuentes

Por qué es importante celebrar el Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia en el contexto de los estudios de Matemáticas?

La celebración de este día en el contexto de Matemáticas es fundamental para reconocer el papel histórico y actual de las mujeres en esta ciencia, así como para motivar a las futuras generaciones de mujeres a explorar y contribuir al campo matemático sin prejuicios ni barreras de género. Es una oportunidad para destacar la necesidad de una representación equitativa y para inspirar la participación femenina en las Matemáticas y la academia en general.

¿Qué iniciativas lleva a cabo la Universidad de Almería para fomentar la participación de las mujeres en el estudio de las Matemáticas?

La *Universidad de Almería* está comprometida con promover la igualdad de género y ha implementado varias iniciativas, como ofrecer talleres, conferencias y programas de mentoría dirigidos a estudiantes, con especial enfoque en alentar a las mujeres jóvenes a perseguir carreras en las áreas STEM, incluidas las Matemáticas. Asimismo, colaboramos con colegios, institutos y entidades para organizar actividades que den visibilidad a las científicas y matemáticas, creando un entorno de apoyo y promoción

para nuestras estudiantes y profesoras.

¿Hay alguna matemática destacada a nivel histórico o contemporáneo cuyo trabajo se celebre en la Universidad?

En la *Universidad de Almería*, celebramos y reconocemos las contribuciones de matemáticas notables. Una de las figuras inspiradoras que frecuentemente destacamos (tenemos un seminario con su nombre) es la de Emmy Noether, cuyas bases teóricas en álgebra abstracta y física teórica han sido fundamentales para el desarrollo contemporáneo de las Matemáticas. Adicionalmente, promovemos el estudio y la divulgación de las obras de matemáticas contemporáneas que están marcando diferencia en el campo con su investigación y descubrimientos.

¿De qué manera se está trabajando para cerrar la brecha de género en el campo de las Matemáticas en nuestra Universidad?

Impulsamos programas de mentoría y ofrecemos cursos específicos para apoyar a las estudiantes en su desarrollo académico y profesional (con un programa propio Univergem). Además, trabajamos en generar conciencia sobre la igualdad de género y respaldamos los esfuerzos por eliminar los estereotipos de género en el campo de las Matemáticas.

EXPERIENCIA DOCENTE

Un acercamiento a la hoja de cálculo en 5.º de Primaria

José Antonio Rodríguez Martínez
Colegio Compañía de María (Almería)

De todos los retos tecnológicos e informáticos relacionados con las matemáticas a los que podemos enfrentarnos hoy en día, quizás uno de los más generalizados sea el de la hoja de cálculo.

Esa aparentemente interminable tabla, con sus celdas, filas y columnas, suele aparecer en nuestras vidas en determinados momentos y por lo general con una función más cercana a la de un organizador de datos sin pretensión de ser calculados, que para la verdadera función para la que fue creada.

El *Excel* y su cohorte de programas afines, suele quedar lejano y distante a cualquier currículum de estudios en educación primaria. No obstante, quise experimentar si mi alumnado de matemáticas de 5.º, como buenos nativos digitales que se les presupone, sabrían ver el programa con otros ojos más amables que los de aquellos adultos

que se enfrentan a él por primera vez. **Spoiler:** No sólo lo encontraron fácil y asequible, también entretenido y útil para crear, entender y tratar estadísticamente cualquier conjunto de datos.

Después de trabajar cantidades, medias, frecuencias y una fría retahíla de términos estadísticos, decidí acudir pragmáticamente al día a día de una familia y su economía para diseñar el cuestionario que nos reportaría los datos que necesitábamos.

Tratando de evitar la pregunta recurrente a la que nos enfrentamos los docentes en nuestras clases: «*profe, ¿pero esto en la vida real para qué sirve?*», decidí recoger datos sobre la cuantía que, según el alumnado, una familia gastaría al mes; teniendo en cuenta que la familia estaba compuesta por dos cabezas de familia, dos personas mayores, dos jóvenes (entre los que se encontraban) y una mascota.

A partir de una tormenta de ideas en la que participó

todo el alumnado, se separaron los gastos en: tecnología, alimentación, ropa, facturas de casa, transporte, extraescolares, colegio, limpieza, ocio, salud, viajes, mascota y gastos extras.



Una vez hechas las separaciones, se comenzó la recogida de datos en las tres clases donde impartí matemáticas. La curiosidad y el interés del alumnado brotaba de forma natural, en un proceso que yo sólo tuve que moderar. Disfruté de ver cómo se advertían entre ellos de aquellas aportaciones que estaban fuera de lugar. «No puedes gastar 500€ en tecnología al mes», «la salud es lo más importante, es donde más deberías gastar», «hablamos de media al mes, que recoge un dato que depende del año»...

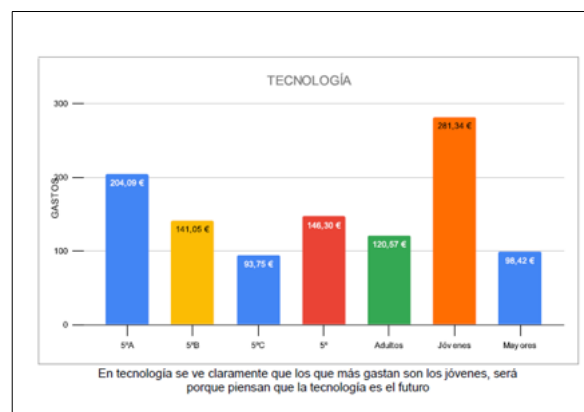
El siguiente paso de nuestra investigación fue corroborar si sus datos se adecuaban a la realidad y para ello el cuestionario se extendió hasta sus casas y sus familias. De este modo, debieron rellenar el cuestionario (siempre que fuera posible de forma digital, a través de un enlace que yo creé con los formularios de Google) con 6 personas de su elección.

De estas 6 personas, dos de ellas debían ser «jóvenes» (menores de 18 años), dos adultas (entre los 18 y los 65) y dos mayores (por encima de los 65). Con el formulario digital, fue muy sencillo pasar todos los datos a una hoja de cálculo (es un proceso automático) y fue el momento de poner a prueba todo lo aprendido durante el curso.

Podría parecer abrumador trabajar con la cantidad de datos que teníamos (cerca de 500 cuestionarios, con 13 respuestas cada uno), pero el proceso de actualización de resultados en la hoja de cálculo de forma automática fue aceptado con normalidad, e incluso celebrada con alegría con cada actualización.



Llegando al final de nuestro experimento, probamos a realizar algunos histogramas, gráficas de barras, sectores circulares y polígonos de frecuencias. Lo que para muchos era un tedio hacer a mano, se convirtió en algo motivador, por ver cuántas formas y colores podían mostrar los resultados de sus datos con apenas un par de clics.



Más adelante, aprovechando un evento del centro llamado «la celebración del aprendizaje», donde todas las clases pueden enseñar a las familias algunas de sus investigaciones del curso, 5.º de primaria preparó con orgullo sus estudios sobre gastos mensuales para una familia.

Ver al alumnado sacar sus conclusiones sobre por qué los jóvenes opinan que el gasto en tecnología era mayor que en otras áreas, por qué los mayores daban tanta importancia a las medicinas o por qué una casa cuesta tanto, a veces era más importante que todo lo demás. Un «todo lo demás» que, en este caso, no era ni más ni menos que: recolección y análisis de datos, frecuencias absolutas y relativas, cálculo de medias y medianas, expresiones gráficas de datos estadísticos...

A modo de epílogo, les diré que muchos de los trabajos que ahora realizan para cualquier asignatura incluye gráficas de todo tipo. Gráficas, que como el propio alumnado me dice: «con la hoja de cálculo se hacen en un segundo profe... y las entiendo». ■

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Cerca y lejos

Valeria Gisbert Gallego
CEPER Retamar (Almería)

David Crespo Casteleiro
IES Aurantia (Benahadux, Almería)

En el curso 2022/2023 el IES Aurantia (Benahadux) participó en el programa *Vivir y Sentir el Patrimonio*, centrándonos alrededor del *Canal de San Indalecio*, una estructura hidráulica del siglo XIX para transportar agua desde Benahadux a la capital.

Al recorrer la Molineta, donde aún se conservan diferentes acequias, acueductos y balsas, podemos tener una dimensión de la envergadura de la obra, toda vez que supone una estupenda oportunidad para conocer y valorar el entorno natural, destacando el caracol endémico *Iberus gualtieranus gualtieranus*, conocido popularmente como *chapa*.

En colaboración con el Departamento de Geografía e Historia, el de Matemáticas se trazó como objetivo la sublimación en azulejos del trazado del canal, así como paneles interactivos que aportaran información de los hitos más destacados. Adoptando como mascota la *chapa*, planteamos una situación de aprendizaje cuyo producto final era la recreación de una espiral áurea, curva que guarda un parecido más que razonable con su concha (Corbalán, 2010).

La propuesta pasaba por la confección de unas fichas que, dispuestas sobre el trazado de la espiral y a modo de dominó, aportaran un aspecto lúdico al hacerlas caer. Tras cortar rectángulos de madera en proporción áurea se llevaron al CEPER Retamar, donde internos del Módulo Educativo las lijaron y embellecieron con aceite de teca, acción que conectó al alumnado de uno y otro centro físicamente, aunque en la distancia.

En una segunda fase, el profesorado del Aurantia explicó en el Centro Penitenciario El Acebuche en qué consistía el proyecto intercentros. Al margen del contenido matemático de la charla, en la que inexorablemente la sucesión de Fibonacci y el número de oro fueron invitados de excepción, se pretendía que el alumnado fuese consciente de nuestro rico patrimonio histórico y natural, mostrando el peligro de extinción que se cierne sobre el caracol *chapa*.

Una vez terminadas las fichas, profesorado del Aurantia regresó al CP El Acebuche y con la ayuda de cuerda, metro y tizas, sobre el patio del módulo 8 se trazó una espiral áurea. La construcción no estuvo exenta de dificultades técnicas, algunas de las cuales fueron solventadas por la pericia y el conocimiento empírico del teorema de Pitágoras que poseían los internos, como pueden observarse [aquí](#).

El nutrido grupo de alumnos presente en el patio y acompañado de sus docentes del CEPER, colocaron se-

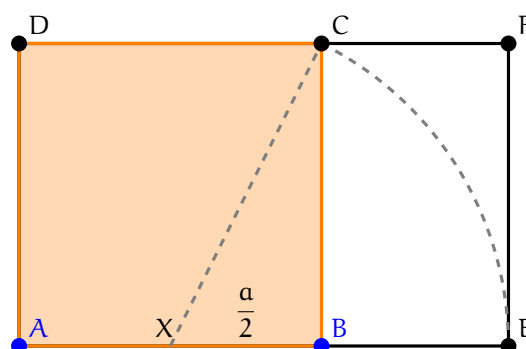
cuencialmente las 272 fichas y tras impulsar la primera, una tras otra fueron cayendo en un ambiente de expectación, culminando entre gritos de júbilo y aplausos, que se recogen en este [vídeo](#).

Con la experiencia acumulada la actividad fue trasladada al Aurantia, siendo alumnado de 3.º de ESO el protagonista, divulgando la construcción en los recreos. Las buenas sensaciones recibidas y el ánimo de concienciación, nos animaron a transferir la actividad a los más pequeños del pueblo en el CEIP Padre Manjón, siendo también invitados a participar en la Semana Cultural del IES Carmen de Burgos en Huércal de Almería, municipio por el que transcurre el *Canal de San Indalecio*, y donde por desgracia es cada vez más infrecuente encontrar ejemplares de *chapa*.

Desde el punto de vista de la asignatura de Matemáticas, al margen de presentar el origen y obtención del número de oro, necesitábamos construir la espiral áurea y calcular su longitud para determinar el número de piezas de madera necesarias y sus dimensiones. Las siguientes líneas aportan las claves para resolver estos problemas.

El rectángulo áureo.

Sea ABCD un cuadrado de lado $\overline{AD} = a$ y X el punto medio de $\overline{AB}$. Haciendo centro en X y con radio $\overline{XC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$, trazamos un arco de circunferencia que cortará a la recta $\overline{AB}$ en el punto E.



Si prolongamos el lado $\overline{DC}$ y por E trazamos una paralela al lado $\overline{CB}$, sea F la intersección de ambas rectas. Entonces:

$$\overline{AE} = \overline{AX} + \overline{XE} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}a}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a = \phi a,$$

lo que implica que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \phi$ y decimos que el rectángulo AEFD, es áureo.

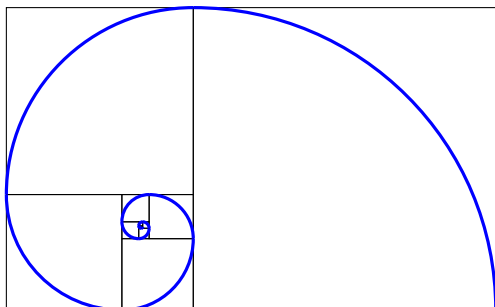
La espiral áurea.

De la construcción anterior se desprende:

$$\overline{BE} = \overline{XE} - \overline{XB} = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a = \frac{a}{\phi},$$

lo que implica que $\frac{FE}{BE} = \phi$. Es decir, que al sustraer a un rectángulo áureo un cuadrado construido sobre el lado menor, el rectángulo resultante es nuevamente áureo.

La siguiente imagen muestra rectángulos áureos sobre los que se han ido construyendo cuadrados y trazando en estos últimos cuadrantes de circunferencia cuyos radios son, respectivamente, sus lados, generando la curva coloreada en azul y que se conoce como **espiral áurea**.



Longitud de la espiral áurea.

Del apartado anterior se deduce que $\frac{BE}{FE} = \frac{1}{\phi}$, lo que demuestra que la sucesión decreciente de los lados de los cuadrados, es una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{\phi}$.

Puesto que los lados nos aportan las medidas de los radios de los cuadrantes de circunferencia, la longitud de la espiral áurea será la suma de una serie geométrica convergente, pues $\left| \frac{1}{\phi} \right| < 1$.

En efecto, denotando por $\mathcal{L}$ a la longitud de la espiral

áurea:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}2\pi a + \frac{1}{4}2\pi \frac{a}{\phi} + \frac{1}{4}2\pi \frac{a}{\phi^2} + \dots \\ &= \frac{\pi a}{2} \left(1 + \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi} \right)^n \\ &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi}} \\ &= \frac{\pi a}{2} \frac{\phi}{\phi - 1}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\phi^2 - \phi - 1 &= 0 \Rightarrow \phi^2 - 1 = \phi \\ &\Rightarrow (\phi + 1)(\phi - 1) = \phi \\ &\Rightarrow \frac{\phi}{\phi - 1} = \phi + 1 = \phi^2,\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{L} = \frac{\pi \phi^2}{2} a.$$

Referencias

- [1] Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Teaching mathematics in a bilingual environment

Manuel Jaime Villegas Rodríguez
IES Sabinar (Roquetas de Mar, Almería)



Teaching Mathematics in a bilingual environment is a fascinating challenge that goes beyond the mere transmission of numerical concepts. The duality of languages in the classroom not only expands communication possibilities, but it also provides a unique platform for fostering critical thinking and problem-solving strategies from diverse perspectives. In fact, the need to translate mathematical concepts between two languages strengthens understanding and encourages greater conceptual clarity. However, it's important to mention a significant limitation in bilingual teaching: the varied level of English proficiency among students. This challenge underscores the importance of adapting content and using

methodological strategies such as visual aids to ensure equitable understanding for all students.

On the other hand, bilingual teaching allows for the incorporation of cultural diversity in the exploration of mathematics. By exposing students to problems and mathematical approaches from multiple languages, a deeper and more flexible understanding of the discipline is promoted.

In my first year as a bilingual teacher, I have found a valuable opportunity to enrich mathematical content by introducing concepts from the English educational system. Integrating pedagogical approaches from other contexts strengthens students' learning experiences, providing them with a broader perspective on how mathematics is approached in different educational systems.

Ultimately, the diversity of methods and strategies not only broadens their horizons but also helps adapt content in case of learning needs. This integrative approach transcends language barriers, building bridges between educational cultures and preparing students to face challenges in an increasingly interconnected world. ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Consideremos un natural n con $1 \leq n \leq 9999$. Usaremos siempre cuatro cifras para expresarlo, colocando ceros a la izquierda cuando sea necesario. Así, por ejemplo, escribiremos 0063 en lugar de 63.

Supongamos que $abcd$ es el número que resulta al ordenar las cuatro cifras de n de mayor a menor. En tal caso, $dcba$ es el número que se obtiene al escribirlas de menor a mayor. La *diferencia de Kaprekar* de n es el entero

$$D_{\text{Kap}}(n) = abcd - dcba.$$

Obsérvese que $D_{\text{Kap}}(0827) = 8720 - 0278 = 8442$.

Es muy conocida la existencia de un (único) natural de cuatro cifras que coincide con su diferencia de Kaprekar. Se trata del número 6174. Como puede apreciarse, $D_{\text{Kap}}(6174) = 7641 - 1467 = 6174$. Este último número recibe el nombre de *constante de Kaprekar*.

Determina, de forma razonada, los naturales n , de cuatro cifras, tales que

$$D_{\text{Kap}}(n) = 2n.$$

Si nos envías tu solución a este problema **puedes obtener** un estupendo **reloj inteligente (smartwatch)** y un regalo relacionado con las matemáticas.

¿La solución más elegante u original tiene premio!

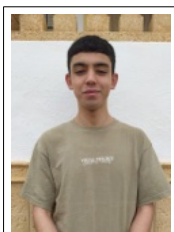
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es **hasta el 15 de abril de 2024**.

Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior



Abdelkarim Bellahcen Jerryai

En esta edición del concurso, el jurado ha considerado que la solución ganadora ha sido la enviada por Abdelkarim Bellahcen Jerryai, estudiante de segundo de Bachillerato del *IES Sol de Portocarrero* de Almería.

Animamos a todos los estudiantes a que participen en este concurso enviándonos vuestras soluciones al problema propuesto.

Problema propuesto en el número anterior

Decía don Salvador, mi profesor de matemáticas de primaria, que los divisores de un número entero son como su familia y que los más afortunados son los que tienen una familia numerosa. Le gustaba la gente positiva, así que en la familia de divisores solo contemplaba los positivos y, por supuesto, tenía en cuenta al benjamín, el uno, y al mayor de todos, el propio entero.

En una ocasión nos dejó una pregunta que, según él, sabríamos responder con el paso del tiempo, aún era demasiado pronto. Espero que recordéis este momento, comentó, aunque ya no estéis conmigo, cuando por fin halléis la solución. Recuerdo perfectamente la pregunta, aunque, en realidad, eran dos: ¿Cuántos miembros puede llegar a tener la familia de divisores de un entero del 1 al 100? ¿Cuáles son los afortunados enteros?

Aún no sé si sería capaz de responder con un buen razonamiento. Alguien que pueda hacerlo leerá esta historia. Al menos, así lo espero.

Solución:

Sea el conjunto $M = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100\}$, busquemos aquellos números con el máximo posible de divisores.

En primer lugar, excluimos de dicho conjunto los números primos, ya que siendo p cualquier número primo, se tiene que $\text{div}(p) = \{1, p\}$. Además, también excluimos el 1, dado que $\text{div}(1) = \{1\}$.

En consecuencia, consideramos el conjunto M' que contiene a los elementos de M menos los números primos y el 1.

En segundo lugar, se descompone cada número del conjunto M' para observar aquellos factores primos con los que se pueda obtener una mayor combinación de productos que dan sus propios divisores y que la suma de dichas combinaciones den como resultado el máximo número de divisores posible.

Es posible no considerar los primeros elementos del conjunto M' debido a que al albergar pocos factores, la combinación en comparación con los demás no será tan grande.

■ Agrupación 1: del 30 al 45:

$$\begin{array}{lll} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 & 36 = 2^2 \cdot 3^2 & 44 = 2^2 \cdot 11 \\ 32 = 2^5 & 38 = 2 \cdot 19 & 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 33 = 3 \cdot 11 & 39 = 3 \cdot 13 & \\ 34 = 2 \cdot 17 & 40 = 2^3 \cdot 5 & \\ 35 = 5 \cdot 7 & 42 = 2 \cdot 21 & \end{array}$$

■ Agrupación 2: del 46 al 60:

$$\begin{array}{lll} 46 = 2 \cdot 23 \cdot 5 & 52 = 2^2 \cdot 13 & 58 = 2 \cdot 29 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 & 54 = 2 \cdot 3^3 & 60 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 49 = 7^2 & 55 = 5 \cdot 11 & \\ 50 = 2 \cdot 5^2 & 56 = 2^3 \cdot 7 & \\ 51 = 3 \cdot 17 & 57 = 3 \cdot 19 & \end{array}$$

■ Agrupación 3: del 62 al 80:

$$\begin{array}{lll} 62 = 2 \cdot 31 & 68 = 2^2 \cdot 17 & 75 = 3 \cdot 5^2 \\ 63 = 3^2 \cdot 7 & 69 = 2 \cdot 23 & 76 = 2^2 \cdot 19 \\ 64 = 2^6 & 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 & 77 = 7 \cdot 11 \\ 65 = 5 \cdot 13 & 72 = 2^3 \cdot 3^2 & 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \\ 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 & 74 = 2 \cdot 37 & 80 = 2^4 \cdot 5 \end{array}$$

■ Agrupación 4: del 81 al 100:

$$\begin{array}{lll} 81 = 3^4 & 88 = 2^3 \cdot 11 & 95 = 5 \cdot 19 \\ 82 = 2 \cdot 41 & 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 & 96 = 2^5 \cdot 3 \\ 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 & 91 = 7 \cdot 13 \cdot 7 & 98 = 2 \cdot 7^2 \\ 85 = 5 \cdot 17 & 92 = 2^2 \cdot 23 & 99 = 3^2 \cdot 11 \\ 86 = 2 \cdot 43 \cdot 11 & 93 = 3 \cdot 31 & 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ 87 = 3 \cdot 29 & 94 = 2 \cdot 47 & \end{array}$$

Doce números son candidatos a obtener el máximo número de divisores.

$$\{36, 40, 48, 54, 56, 60, 64, 72, 80, 84, 90, 96\}$$

El método para obtenerlo es el siguiente. Tomemos como ejemplo el $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tabulando los factores obtengo los distintos productos que se pueden dar entre ellos. Sumando dichos productos, los propios factores y el 1 calculo el número de divisores:

	3	9
2	6	18
4	12	36

por lo que los divisores de 36 son $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, en consecuencia $\text{div}(36) = 9$.

Aplicando este método obtengo que:

$$\begin{array}{lll} \text{div}(36) = 9 & \text{div}(56) = 8 & \text{div}(80) = 10 \\ \text{div}(40) = 8 & \text{div}(60) = 12 & \text{div}(84) = 12 \\ \text{div}(48) = 10 & \text{div}(64) = 7 & \text{div}(90) = 12 \\ \text{div}(54) = 8 & \text{div}(72) = 12 & \text{div}(96) = 12 \end{array}$$

Como resultado, obtengo que la cantidad máxima de divisores que puede tener un entero (del 1 al 100) es de 12 y los números que tienen esa cantidad son el 60, 72, 84, 90 y 96.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

¡Eureka! ¡Eureka!

Antonio Rosales Góngora
IES Bahía de Almería (Almería)

El historiador de las matemáticas E.T. Bell afirmaba que en cualquier lista de los tres mejores matemáticos de la historia debe aparecer Arquímedes (los otros serían Newton y Gauss). Aunque es conocido principalmente por sus ingeniosos inventos en ingeniería, Arquímedes era, ante todo, un matemático adelantado a su tiempo.



Arquímedes nació en Siracusa, un enclave griego en Sicilia. Era hijo del astrónomo Fidias y, al parecer, estaba emparentado con el rey Hierón II. Toda su vida estuvo dedicada a la investigación científica, y sus descubrimientos son tan fundamentales que han tenido implicaciones en todos los campos científicos.

Pasó tiempo en Egipto y es posible que haya estudiado en Alejandría con Euclides. Mantuvo correspondencia con Eratóstenes, que era amigo suyo y a quien comunicó muchos de sus descubrimientos por escrito.

Según Plutarco, Arquímedes se preocupaba tanto por la matemática abstracta que consideraba sórdido e innoble «cualquier arte que sirviese meramente para el uso y el provecho, su ambición se limitaba a aquello que, por su belleza y excelencia, permaneciese al margen de

las necesidades más comunes de la vida».

A pesar de su desprecio por las aplicaciones prácticas de las matemáticas y de la poca valoración que daba a sus ideas en ingeniería, sus inventos le otorgaron mayor popularidad que su genialidad matemática.

El historiador Vitrubio cuenta una célebre anécdota sobre la corona del rey Hierón que resalta su imagen de matemático despistado. Parece ser que el rey, con motivo de su ascensión al trono de Siracusa, se comprometió a ofrecer una corona de oro a los dioses. Pidió a un orfebre que creara esta corona suministrándole una cantidad de oro que había pesado previamente. La corona producida pesaba lo mismo que el oro entregado por Hierón, sin embargo, este sospechaba que el orfebre había sustituido cierta cantidad de oro por plata, por lo que pidió a Arquímedes que probara que el orfebre lo había estafado.

Fue mientras tomaba un baño que tuvo la intuición de cómo probarlo. Se dio cuenta que cuanto más parte de su cuerpo se sumergía, mayor era la cantidad de agua que rebosaba la bañera. Orgulloso de su descubrimiento, corrió desnudo a la calle gritando EUREKA! EUREKA! (¡lo he encontrado!, ¡lo he encontrado!).

Tomó dos sólidos de la misma masa que la cantidad de oro suministrada por Hierón, uno de oro y otro de plata. Tras llenar un recipiente con agua hasta el borde, sumergió la masa de oro y observó que el recipiente perdía cierta cantidad de agua. Lo intentó de nuevo con la masa de pla-

ta y comprobó que la cantidad de agua perdida era mayor que en el caso del oro. Repitió el experimento con la corona, y descubrió que perdía más agua que con el oro y menos que con la plata, lo que demostraba que una cierta cantidad de plata se había mezclado con el oro para hacer la corona.



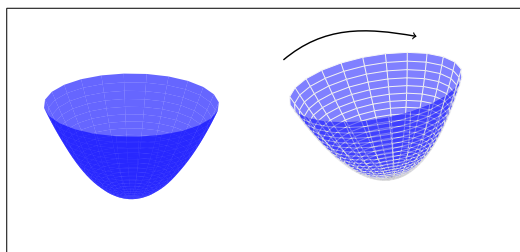
Arquímedes corriendo desnudo después de su descubrimiento. Fuente: Wikipedia

Arquímedes se hizo célebre por su intervención en la defensa de Siracusa contra los romanos, el propio general Marcelo se quejaba a sus ingenieros, preguntándoles: «¿Es que nunca terminaremos de luchar contra este Briareo de la geometría?», en referencia al gigante de cien brazos, hijo de Urano y Gea.

Según la leyenda, Arquímedes murió a manos de un soldado romano cuando, absorto en sus diagramas, no obedeció al soldado que le ordenó que le siguiera, contestándole «Apártate de mis diagramas» lo que encolerizó al soldado que, desobedeciendo las ordenes de Marcelo, dio muerte al matemático más grande de la antigüedad.

La obra de Arquímedes abarca una amplia variedad de campos, tanto en matemáticas como en física. En su obra *Sobre los cuerpos flotantes* presenta sus investigaciones en hidrostática y aborda el equilibrio de un paraboloide de revolución flotando en un líquido.

El problema es: Si el paraboloide está inclinado un cierto número de grados, ¿logrará levantarse de nuevo? Este estudio conduce al problema del equilibrio de los cascos de los buques.



Arquímedes también se interesó por el problema de la manipulación de objetos pesados, lo que le llevó a estudiar y clasificar las palancas, exponiendo los principios fundamentales. En su estudio, adopta un esquema similar al de la geometría, enunciando principios físicos en forma de postulados, como:

- Dos masas desiguales, a distancias inversamente proporcionales a esas masas, están en equilibrio.

- Dos masas iguales a distancias diferentes no están en equilibrio y se inclina del lado de la masa que está a más distancia.
- Dos masas que están en equilibrio a distancias iguales, son iguales.

Arquímedes estaba fascinado por los números grandes hasta el punto de desarrollar un sistema en el que podía representar números de hasta 80 trillones de dígitos. Este sistema lo utilizó en su obra *El Arenario* para demostrar que la cantidad de granos de arena en el mundo es finita. En este libro destaca el hecho de que Arquímedes cuestiona creencias habituales como la idea de que el número de granos de arena es infinito, y muestra respeto hacia la teoría heliocéntrica de Aristarco de Samos.



El reconocimiento de los matemáticos a Arquímedes aparece en la medalla Fields con su esfinge, el cilindro y la esfera

En su obra *El Método*, Arquímedes nos revela cómo, antes de conocer las demostraciones, se convence de la veracidad de ciertos teoremas. Introduce el concepto de experimento mental en la investigación rigurosa y, sobre todo, libera a la matemática de la rigidez impuesta por Euclides y Platón: Debía empezar por los axiomas y seguir pasos lógicos con herramientas establecidas. Arquímedes no duda en aprovechar, después de una exploración previa, las relaciones entre los objetos matemáticos abstractos (formas platónicas) y la realidad física.

Arquímedes también fue precursor del cálculo diferencial e integral. Utilizó el método de dividir en rectángulos y hallar el límite al que se acerca la suma cuando el número de rectángulos tiende a infinito, proceso conocido como integración. Mediante su propia versión de este método, Arquímedes calculó los volúmenes y las superficies de la esfera, cono, elipsoides y paraboloides.

Arquímedes consideraba uno de sus mayores logros el descubrimiento de que el volumen de una esfera inscrita en un cilindro era siempre dos tercios del volumen del cilindro. Su satisfacción por este resultado fue tan grande que hizo que lo grabaran en su lápida. El famoso orador Cicerón descubrió la tumba 137 años después gracias a la inscripción.

Arquímedes transformó el mundo de las matemáticas y su relación con el cosmos, ofreció las primeras pruebas empíricas, no mitológicas, del diseño aparentemente matemático de la naturaleza. Su obra dio origen a la percepción de que las matemáticas son el lenguaje del Universo.

Referencias

- [1] Boyer, C.B. (1996) *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.
- [2] Bourbaki, N. (1976) *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.
- [3] Collete, J.L. (1985) *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.
- [4] Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

El vencimiento medio de una corriente de pagos

Un ejemplo de aplicación del concepto de ϕ -media

Salvador Cruz Rambaud
Universidad de Almería

En el mundo de la Estadística existen diferentes medias (media aritmética, geométrica, armónica y media de orden r) que se utilizan como promedios de una variable estadística discreta que toma los valores x_i con frecuencias relativas f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) (recuerda que el símbolo $:=$ significa «igual por definición»):

- Media aritmética: $\bar{x} := f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$.
- Media geométrica: $G := x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}$.
- Media armónica: $H := \frac{1}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}}$.
- Media de orden r : $M_r := (f_1 x_1^r + f_2 x_2^r + \dots + f_k x_k^r)^{1/r}$.

Estas medias pueden ser utilizadas en diferentes contextos dentro del campo de la Economía. Por ejemplo, es aconsejable emplear la media geométrica cuando los valores de la variable son los factores de capitalización aplicados en períodos consecutivos de tiempo. Veamos un caso práctico muy sencillo.

Si, en un préstamo de seis años de duración, se han aplicado sucesivamente un 2 % durante los tres primeros años, un 3,5 % durante los dos siguientes y un 4 % durante el último año, los factores de capitalización son $(1 + 0,02)$, $(1 + 0,035)$ y $(1 + 0,04)$, aplicados durante 3, 2 y 1 año, respectivamente, por lo que la media de los tipos de interés, representada por $\bar{i}$, se calcularía a partir del factor medio de capitalización $(1 + \bar{i})$:

$$1 + \bar{i} = \sqrt[6]{(1 + 0,02)^3 (1 + 0,035)^2 (1 + 0,04)^1} = 1,0282984,$$

de donde, despejando, tenemos que $\bar{i} = 2,83 \%$.

En este punto, sería interesante observar que los conceptos de media geométrica, armónica y de orden r pueden ser consideradas distintas «versiones» de la media aritmética. En efecto, la media geométrica es la media aritmética donde las operaciones de suma y producto han sido «elevadas de rango» a producto y potencia, respectivamente.

Por su parte, la media armónica no es sino el resultado de sustituir todos los valores que aparecen en la media aritmética por sus inversos:

$$\frac{1}{H} = f_1 \frac{1}{x_1} + f_2 \frac{1}{x_2} + \dots + f_k \frac{1}{x_k} = \sum_{i=1}^k f_i \frac{1}{x_i}.$$

Por último, la media de orden r surge al sustituir todos los valores que intervienen en la definición de media aritmética por sus correspondientes potencias, elevando a r :

$$(M_r)^r = f_1 x_1^r + f_2 x_2^r + \dots + f_k x_k^r = \sum_{i=1}^k f_i x_i^r.$$

De las comparaciones anteriores con la media aritmética parece que se queda fuera la media geométrica porque «en apariencia» dicha media no procede, como la media armónica y la media de orden r , de ninguna transformación de los valores de la media aritmética, sino más bien de las operaciones que se efectúan para su cálculo.

Pues bien, vamos a ver que esto no es así y que todas las medias definidas anteriormente son un caso particular de un concepto más amplio en el campo de la Estadística Descriptiva, a saber, la ϕ -media.

En efecto, sea ϕ una función continua y monótona (creciente o decreciente), definida en el intervalo $[x_1, x_k]$. Se define la ϕ -media de la variable estadística discreta que toma los valores x_i con frecuencias relativas f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) como el valor M_ϕ que satisface la siguiente igualdad:

$$\phi(M_\phi) := \sum_{i=1}^k f_i \phi(x_i).$$

Tal y como era nuestro objetivo, una primera observación que debemos hacer en este momento es que la ϕ -media representa una manera elegante y unificada de definir las cuatro medias anteriores. En efecto,

- La media aritmética es la ϕ -media, donde $\phi(x) = I(x)$, siendo I la función identidad.
- La media geométrica es la ϕ -media, donde $\phi(x) = \ln x$, siendo $\ln$ la función logaritmo neperiano.

- La media armónica es la ϕ -media, donde $\phi(x) = \frac{1}{x}$.
- La media de orden r es la ϕ -media, donde $\phi(x) = x^r$.

La segunda observación que urge aclarar es que, lejos de tratarse de una mera complicación metodológica, el concepto de ϕ -media nos permite deducir la conocida relación de desigualdad entre los promedios anteriormente definidos:

$$H < G < \bar{x} < Q,$$

siendo $Q := M_2$ la denominada media cuadrática o media de orden 2.

Después de esta breve introducción sobre el concepto de ϕ -media, el objetivo de este ensayo es definir el concepto de vencimiento medio de una corriente de pagos comenzando por lo que, en Matemáticas Financieras, se conoce como el valor actual de una renta unitaria, temporal (de n términos), valorada al tanto i , definida de la siguiente forma:

$$a_{\overline{n}|i} := (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n},$$

que representa el valor, hoy, de una serie de pagos iguales de 1 euro en los instantes $1, 2, \dots, n$. En efecto, consideremos la función exponencial

$$\phi(x) = (1+i)^{-x},$$

definida en el intervalo cerrado $[1, n]$. En este caso, aplicando la definición de ϕ -media, planteamos:

$$(1+i)^{-M_\phi} := \frac{(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n}}{n} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{n},$$

de donde:

$$M_\phi = \frac{\ln n - \ln a_{\overline{n}|i}}{\ln(1+i)}.$$

Por ejemplo, si $n = 10$ e $i = 0,05$, se verifica que:

$$M_\phi = \frac{\ln 10 - \ln a_{\overline{10}|0,05}}{\ln(1+0,05)} = 5,29914229.$$

Podemos interpretar este resultado diciendo que «pagar 1 euro (ó x euros) en los instantes $1, 2, \dots, n$ es financieramente equivalente a pagar 10 euros (ó $10x$ euros) en el instante 5,29914229, es decir, el día 18 de abril del 6.º año».

Como colofón a este breve ensayo, podemos afirmar que, desde el punto de vista de la Estadística Descriptiva, la Matemática Financiera nos proporciona una nueva aplicación del concepto de ϕ -media, en este caso el vencimiento medio de una corriente de pagos iguales, cuando la función ϕ es la exponencial decreciente. No obstante, este valor añadido es todavía más relevante si tenemos en cuenta que, desde un punto de vista financiero, este concepto es vital para el cálculo de la TAE (Tasa Anual Equivalente) de una fuente de financiación para la empresa.

Finalmente, como recomendación de futuro, en este breve ensayo, animamos a los estudiantes de Enseñanza Secundaria que tengan siempre a mano el *Curso de Estadística Descriptiva* de G. Calot (Editorial Paraninfo, Madrid, 1974), en donde se puede encontrar un tratamiento exquisito, elegante y, a la vez, riguroso de la Estadística Descriptiva, disciplina de enorme utilidad para todos los campos de la Ciencia. ■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

El Premio Vicent Caselles

Jóvenes matemáticas galardonadas en 2022 y 2023

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla
Isabel María Ortiz Rodríguez
Universidad de Almería



Ángela Capel y Elena Castilla

Cinco chicas son protagonistas de este artículo por su creatividad, audacia intelectual y logros en el campo de

las matemáticas. Se trata de las jóvenes que han recibido el *Premio Vicent Caselles* en la edición de 2022, Ángela Capel y Elena Castilla, junto con Claudia García, Paula Gordaliza y María Soria, distinguidas en 2023.

Su investigación, aplicando las matemáticas en la construcción de ordenadores cuánticos, en el campo de física y la inteligencia artificial, está contribuyendo al avance en la comprensión de fenómenos de la naturaleza y la vida cotidiana.

Ángela Capel Cuevas (Linares, Jaén, 1993) realizó su doctorado en el *Instituto de Ciencias Matemáticas* y la *Universidad Autónoma* de Madrid. Su investigación está relacionada con las propiedades matemáticas de materiales usados para construir memorias cuánticas y lograr que la transmisión de información cuántica sea lo más fiable posible. En la actualidad continúa desarrollando su actividad investigadora en la *Universidad de*

Tubinga (Alemania).

Elena María Castilla González (Madrid, 1993) se doctoró en la *Universidad Complutense* de Madrid. En su investigación aplica modelos estadísticos en el campo de la ingeniería para determinar las condiciones óptimas de conservación de dispositivos de un solo uso, como un airbag o un test de COVID, y así alargar su tiempo de vida. Desde mayo de 2021, es profesora ayudante doctora en la *Universidad Rey Juan Carlos*.



Claudia García, Paula Gordaliza y María Soria

Claudia García López (Almería, 1993) obtuvo el doctorado en la *Universidad de Granada* y la *Universidad de Rennes* (Francia). Su investigación se centra en las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos, por ejemplo, cuando la corriente de un río encuentra una roca que interrumpe su camino y el agua gira alrededor de la roca formando un vórtice. Su trabajo ha permitido también entender qué ocurre en una región de la superficie de Saturno, donde se forma un hexágono lleno de vórtices. En la actualidad es profesora ayudante doctora en la *Universidad de Granada*.

Paula Gordaliza Pastor (Valladolid, 1994) es doctora en Matemáticas por la *Universidad de Valladolid* y la *Universidad Toulouse III–Paul Sabatier* (Toulouse, Francia). Su trabajo se centra en diseñar y analizar métodos de aprendizaje automático que detecten, controlen y corrijan los sesgos que se producen en los algoritmos de inteligencia artificial. Actualmente es profesora ayudante doctora en la *Universidad Pública de Navarra*.

María Soria Carro (Barcelona, 1993) realizó su tesis doctoral en la *Universidad de Texas* en Austin (EE. UU.). En su investigación estudia fenómenos físicos en los que una magnitud cambia completamente su comporta-

miento al atravesar una superficie que separa dos medios distintos. Los resultados se pueden aplicar en ingeniería aeronáutica para desarrollar materiales compuestos por distintas fibras, como los que se utilizan para construir las alas de un avión. Actualmente es Hill Assistant Professor en la *Universidad de Rutgers* (New Jersey, EE. UU.).

Los *Premios de Investigación Matemática Vicent Caselles* se otorgan cada año a seis investigadores matemáticos, menores de 30 años, españoles o que hayan realizado su investigación en una universidad o centro científico de España. Son concedidos por la RSME y la *Fundación BBVA*. En los volúmenes XIV y XV de este Boletín presentamos a las investigadoras que habían recibido el Premio desde su inicio en 2015 hasta 2021.

En 2022 fueron galardonados Guillem Blanco Fernández, Ángela Capel Cuevas, Elena María Castilla González, Damian M. Dabrowski, Daniel Eceizabarrena y Juan Carlos Felipe-Navarro. Por su parte, en 2023 recibieron el premio Robert Cardona Aguilar, Claudia García López, Roberto Giménez Conejero, Paula Gordaliza Pastor, Óscar Rivero Salgado y María Soria Carro ⁸.

La carrera investigadora es conocida por su gran esfuerzo y dedicación, por lo que es muy positivo que existan este tipo de reconocimientos. Desde aquí queremos felicitar a todos los galardonados y animar a los jóvenes interesados en la investigación a seguir trabajando en esa línea, ya que es muy satisfactorio contribuir a la ciencia.

Con las breves reseñas de este artículo queremos destacar a estas matemáticas cuyas carreras emergentes son un reflejo de la excelencia investigadora y del potencial humano de nuestras aulas universitarias. Su labor evidencia el impacto significativo que las matemáticas tienen en las tecnologías y ofrece un modelo inspirador para todos los estudiantes que aspiran a contribuir al avance científico. Las trayectorias de Ángela Capel, Elena Castilla, Claudia García, Paula Gordaliza y María Soria demuestran la viabilidad del éxito en campos de estudio desafiantes y, además, refuerzan el mandato de la Universidad de fomentar una educación inclusiva y de calidad, que prepare a las nuevas generaciones para los desafíos del mañana. ■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

The killer problems

Marta Casero Fuentes

Alberto Maza Navarro

Carlos Molina Orzáez

Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

José Antonio Rodríguez Lallena

Universidad de Almería

Durante las décadas de 1970 y 1980 se produjo un auge del antisemitismo en los departamentos de matemáticas y física de las universidades y centros de educación superior

de la URSS (Unión Soviética), aunque no en todos.

La raíz de esta discriminación puede estar (véase [2]) en la corrupción existente en la URSS de esos años: para que entraran en las universidades prestigiosas los hijos de militares y funcionarios, se vetaba la entrada a los llamados «indeseables»: principalmente judíos, pues solían tener un alto nivel académico, pero también alemanes, griegos, chinos y otros grupos étnicos o políticos. La discriminación se

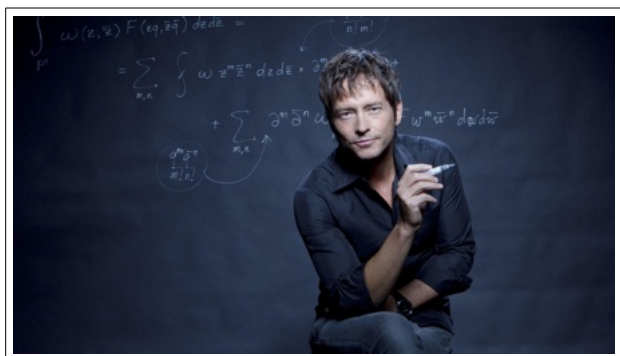
⁸Más información en www.fbbva.es/premios/premios-investigacion-matematica-vicent-caselles-2023.

plasmaba en que se les asignaba problemas muy difíciles en las pruebas de acceso a esas universidades, particularmente en los exámenes orales.

Además de la corrupción, también sucedía que la administración soviética quería restringir el acceso a la universidad a personas que tuvieran un fuerte potencial de desobediencia o de desarrollar políticas hostiles contra la URSS. La traducción del nombre en ruso con el que eran llamados esos problemas difíciles es *coffins*, ataúdes, aunque la traducción al inglés que más prosperó fue la de *killer problems*.

La discriminación fue especialmente dura en el Departamento de Mecánica y Matemáticas (llamado *Mekh-mat*) de la más prestigiosa universidad soviética, la *Estatad de Moscú*.

Alan Shen presenta en [1] estadísticas que muestran que, entre los solicitantes de plaza en el *Mekh-mat* y en otros centros, había un elevado número de judíos que habían ganado premios en las olimpiadas matemáticas, pero muy pocos lograban ser admitidos; lo que contrastaba con el resto de los solicitantes, que contaban con menos premios en olimpiadas y eran admitidos en una gran proporción.



Edward Frenkel

Un ejemplo lo tenemos en el conocido matemático Edward Frenkel, que se presentó a las pruebas de acceso de *Mekh-mat* en 1984, siendo rechazado por ser descendiente de judíos.

Los *killer problems* solían tener un nivel muy superior al normal en esas pruebas de acceso. Otras veces su enunciado era ambiguo, de modo que el corrector podría decir que el estudiante lo había interpretado mal. O bien, los examinadores argumentaban que un ejercicio correctamente resuelto estaba mal por un detalle sin importancia.



Bella Abramovna

Y si el estudiante iba respondiendo bien, se le proponían nuevos ejercicios, cada vez más difíciles, hasta que fallaba (quizá agotados tras muchas horas de examen).

Las reclamaciones tampoco servían de mucho. Pueden encontrarse muchos más detalles sobre todo esto en [1] y [2].

No queremos dejar de mencionar el caso de Bella Abramovna, una profesora de mate-

máticas que organizó una universidad clandestina informal para formar a estudiantes judíos que habían sufrido la discriminación, lo que pagó con su vida. Puede encontrarse su historia en [2], incluido su presunto asesinato por el KGB en 1982, cuando tenía 44 años.

Después de la disolución de la URSS, se ha podido recopilar un buen número de *killer problems*, incluido el nombre de los profesores que los propusieron (véase [3], que incluye su resolución). Suelen ser bastante interesantes. A continuación, se resuelve uno de ellos, complicado (para estar dirigido a personas de 16-17 años) pero interesante.

Ejercicio (Smurov, Balsanov, 1986). Compare las siguientes cantidades: $\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80$ y $2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 79$.

Se trata de saber si la primera expresión es mayor, igual o menor que la segunda. Con la ayuda de software matemático, sería una trivialidad calcular ambas cantidades y ver cuál es mayor; pero en las pruebas no se disponía de ordenador, ni siquiera de calculadora. Presentamos aquí una resolución de este ejercicio siguiendo la que hace Ilan Vardi en [3], pero evitando la parte menos intuitiva de su resolución, que no era necesaria.

Las dos expresiones que hay que comparar se pueden expresar como sigue:

$$\prod_{n=2}^{40} \log_3 2n \quad \text{y} \quad 2 \prod_{n=2}^{40} \log_3 (2n-1).$$

Aunque —al menos, por ahora— no es necesario, lo primero que se va a hacer es transformar las expresiones anteriores en otras que solo tengan logaritmos neperianos, puesto que trabajar con estos suele ser más cómodo. Para lo cual, se aplica una propiedad básica de los logaritmos: para cualesquiera reales positivos a, b, x tales que $a \neq 1 \neq b$, se tiene que

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Tomando $a = 3$ y $b = e$, resulta que $\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$. Al sustituir en ambas expresiones, como el número de logaritmos en base 3 que aparecen dividiendo en cada una de ellas es el mismo (treinta y nueve), en ambas aparecería el denominador $(\ln 3)^{39}$. Por tanto, comparar esas expresiones equivale a comparar las siguientes:

$$\prod_{n=2}^{40} \ln 2n \quad \text{y} \quad 2 \prod_{n=2}^{40} \ln(2n-1);$$

o, lo que es lo mismo, al resultado calcular el logaritmo neperiano (función estrictamente creciente) de ellas, lo que ofrece la posible ventaja de transformar un producto en una suma. Así, las cantidades a comparar pasarían a ser las siguientes:

$$\sum_{n=2}^{40} \ln(\ln 2n) \quad \text{y} \quad \ln 2 + \sum_{n=2}^{40} \ln(\ln(2n-1)).$$

Por tanto, se debe determinar si la diferencia

$$\sum_{n=2}^{40} \ln(\ln 2n) - \ln 2 - \sum_{n=2}^{40} \ln(\ln(2n-1))$$

es mayor, igual o menor que 0.

En la expresión anterior aparecen evaluaciones de la función real $f(x) = \ln(\ln x)$ en los valores naturales de x que van desde 3 hasta 80. Estudiemos esta función.

Es claro que f es estrictamente creciente en su dominio, $(1, \infty)$, por ser composición de dos funciones que también lo son. Su rango es $\mathbb{R}$, pero es positiva en los valores considerados: $f(x) > 0$ si, y solo si, $x > e$.

Estudiemos también la convexidad de f . Es claro que

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{y} \quad f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0.$$

para cualquier $x \in (1, \infty)$. Por tanto, f es una función estrictamente cóncava.

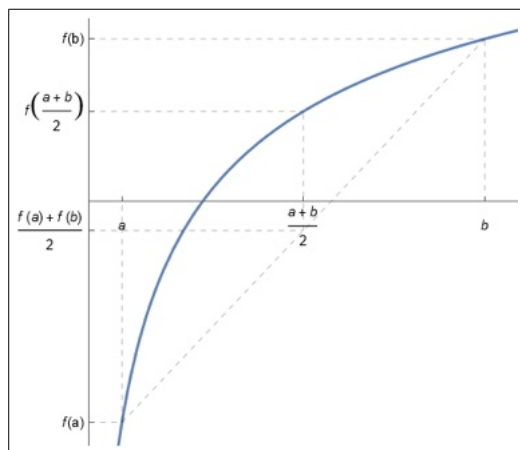
Por ser f continua y estrictamente cóncava, se tiene que

$$\frac{1}{2}(f(2n-1) + f(2n+1)) < f(2n) \quad \text{para } 2 \leq n \leq 40.$$

Para quien no lo sepa, el motivo de esta desigualdad es que una función estrictamente cóncava satisface para cada par de valores a y b de su dominio la desigualdad

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

como se ilustra en la gráfica.



Luego, volviendo a la diferencia que hemos de estudiar, escrita ahora en función de f , se obtiene que

$$\sum_{n=2}^{40} f(2n) - \sum_{n=2}^{40} f(2n-1) - \ln 2$$

es mayor que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{40} (f(2n-1) + f(2n+1)) - \sum_{n=2}^{40} f(2n-1) - \ln 2.$$

Pero esta última cantidad es igual a

$$\frac{f(3) + f(81)}{2} + \sum_{n=3}^{40} f(2n-1) - \sum_{n=2}^{40} f(2n-1) - \ln 2$$

que, cancelando los términos iguales, nos queda

$$\begin{aligned} \frac{f(3) + f(81)}{2} - f(3) - \ln 2 &= \frac{\ln(\ln 81) - \ln(\ln 3)}{2} - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\ln 3^4}{\ln 3} - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 4 - \ln 2 = 0. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\sum_{n=2}^{40} \ln(\ln 2n) - \ln 2 - \sum_{n=2}^{40} \ln(\ln(2n-1)) > 0,$$

por lo que se concluye que $\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80$ es mayor que $2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 79$.

Como dijimos, usando software matemático no habría nada que probar, solo calcular

$$\begin{aligned} \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80 &\approx 17\,294\,231\,958\,936\,950\,243,4 \\ 2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 79 &\approx 16\,099\,460\,748\,792\,219\,828,7, \end{aligned}$$

por lo que la diferencia entre las dos cantidades es grande, 1 194 771 210 144 730 414,6 aproximadamente. Ahora bien, ¿verdad que merece la pena saber resolver el ejercicio como se ha hecho aquí?

Referencias

- [1] Alan Shen. *Entrance Examinations to the Mekh-mat*. The Mathematical Intelligencer 16 (1994), 6–10.
- [2] Mikhail Shifman (editor). *You Failed your Math Test, Comrade Einstein: Adventures and Misadventures of Young Mathematicians or Test your Skills in Almost Recreational Mathematics*. World Scientific, 2005.
- [3] Ilan Vardi. *Mekh-mat Entrance Examinations Problems*. Es un capítulo de [2].

■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

La música de las esferas

Un modelo geométrico de representación de la rima

Antonio Alcaide Soler

Rosa Herrero Salinero

María Peñas Troyano

IES Luis Bueno Crespo (Armillá, Granada)

Este proyecto parte de la constatación de que los esquemas métricos usados tradicionalmente en la clase de lengua/literatura presentan patrones matemáticos y por lo tanto son susceptibles de un estudio más sistemático que incluye su representación gráfica (todo lo que es cuantificable es representable) y, a partir de ahí, la posibilidad de tender puentes hacia la geometría, el dibujo y el diseño.

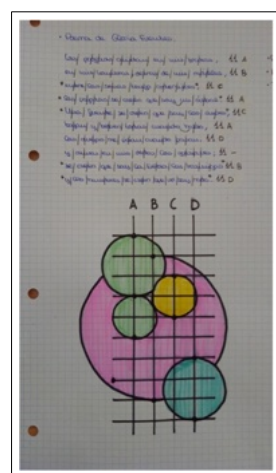


Gráfico de la rima de un poema sobre cuadrícula

La rima ofrece regularidades que, normalmente, se han estudiado de forma superficial, cualitativa. El método que Alcaide ha desarrollado para su representación en el espacio supone una potente herramienta para su estudio abriendo nuevas perspectivas.

Independientemente de las posibilidades teóricas del sistema, lo que nos interesa en el proyecto «La música de las esferas» que, como proyecto de innovación de la Junta de Andalucía, venimos desarrollando los últimos años en nuestro IES, es su aplicación didáctica.

En una primera fase los alumnos/as se familiarizan con el verso, los tipos de rima y los esquemas métricos (hasta aquí el estudio tradicional) para pasar en las siguientes sesiones a representar la rima de un poema en un eje cartesiano (cuadrícula) donde en el eje de abscisas se colocan los distintos tipos de rima (A, B, C...) y en el de ordenadas, cada uno de los versos.

Al unir los puntos verticales contiguos de cada eje de rima formamos las circunferencias que representan el espacio que ocupa cada rima y que coloreamos por ejes.

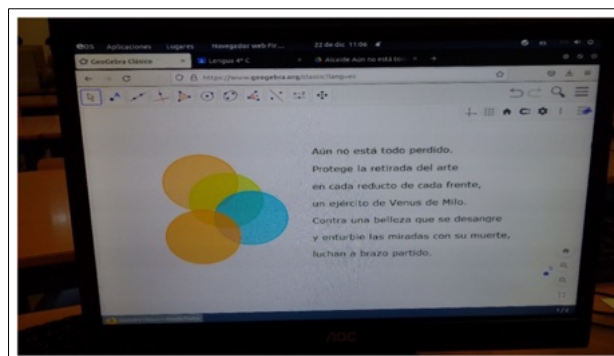
Los versos sueltos, aquellos que no riman dentro de una composición rimada, se anulan en un eje 0 a la izquierda (ocupan un punto en la cuadrícula, pero no generan circunferencias).

De esta forma obtenemos figuras sencillas y complejas que corresponden exactamente (siempre según el modelo) a la estructura interna de la rima del poema.

Desde el punto de vista matemático se trabajan en clase conceptos como recta, segmentos, punto medio, circunferencia centro-radio, protocolo construcción, espacios bidimensionales y tridimensionales, tangencia, intersección, inclusión...

El siguiente paso es el dibujo digital mediante el pro-

grama *GeoGebra*, de uso habitual en diversas materias como matemáticas o tecnología, que nos permite guardar y compartir, representar poemas más complejos y usar las transparencias a la hora de colorear para marcar las intersecciones de unas rimas en otras.



Representando la rima mediante Geogebra

Una vez que los alumnos dominan la rima en dos dimensiones, y aprovechando el carácter totalmente multidisciplinar del proyecto, desde los talleres STEAM o la propia clase de lengua usamos el didáctico programa de diseño *Tinkercad* para obtener figuras que puedan imprimirse mediante impresoras 3D (la alfabetización digital es parte fundamental del proyecto en el que se trabaja con software para diseño e impresión digital).



Impresión 3D de un sexteto

Tras el proceso de laminado mediante *Ultimaker Cura*, se pueden obtener representaciones físicas, diseños en 3D que corresponden al modelo matemático desarrollado que a su vez representa las rimas que contiene el poema.

Desde una perspectiva matemática podemos observar que el sistema reduce las formas estróficas a códigos numéricos, lo que proporciona un medio eficaz para comparar unas figuras con otras y también para apreciar la estructura interna de cada una. De esta manera obtendremos circunferencias de distintos rangos y el esquema numérico nos dará información rápida sobre el número de rimas

y su tamaño. Por ejemplo, una rima ABBA = 3A – 1B (Cuarteto).

Entre las propiedades matemáticas podemos distinguir:

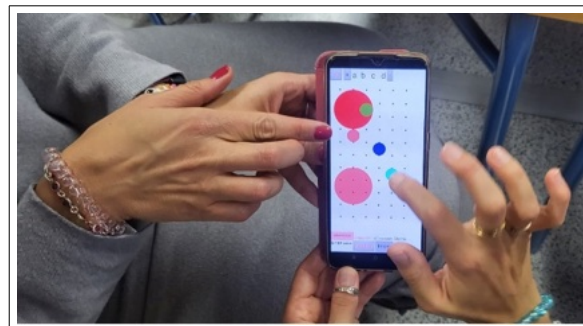
- *Continuidad y discontinuidad*: definiremos la discontinuidad como la ausencia de recursividad de la rima en una estrofa, es decir, la rima no vuelve atrás-izquierda.
- *Equivalencia*: figuras iguales de poemas diferentes pero situados en unos ejes de rima diferentes.
- *Simetría*: su estudio nos permitirá ver la relación entre por ejemplo las rimas ABABB y AABAB con simetría central, o las rimas AABBA con respecto a la rima ABBA que presenta simetría axial.
- *Tangencia, inclusión e intersección*: la tangencia cuando ninguna rima sufre la interferencia de otra de distinto eje y cada rima supone una repetición de la anterior; la inclusión es el caso de las rimas abrazadas en la que una de rango mayor contiene otra menor, por ejemplo, ABBA y debe haber al menos una diferencia de rango 2 para que se produzca, y la intersección que se produce en el resto de circunstancias.
- *Amplitud*: se define como la suma de los rangos de las rimas que la componen y el oyente requerirá mayor atención para captar la rima si la amplitud es mayor.
- *Divisibilidad*: consiste en la posibilidad de descomponer las figuras en elementos mínimos que entran en la formación de varias figuras y que no necesitan de otras rimas para su configuración.



Juego de Rimago (un soneto)

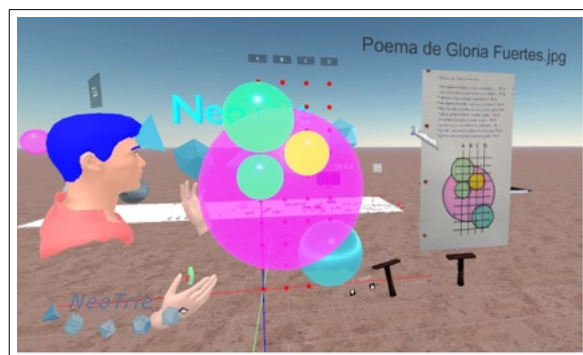
Otro estudio interesante de carácter matemático tiene que ver con la combinatoria y los posibles gráficos que se

pueden conseguir con poemas de distinto número de versos. El estudio de las combinaciones de dos versos, tres versos, cuatro versos... nos permite ver los distintos modelos geométricos y las diferentes composiciones poéticas existentes.



Versión beta de la app

Para su aplicación didáctica en clase se ha desarrollado un juego manipulativo, *Rimago*, que permite combinar discos de diferentes tamaños y colores para componer hasta 70 formas estróficas, las más habituales de la literatura española. El sistema es obviamente internacional, se puede aplicar a cualquier literatura con rima y estamos preparando una rimateca, un repositorio con ejemplos de poemas diferentes de cientos de autores/as.



Construcción en el software NeoTrie VR

Como próximos objetivos nos proponemos ultimar una app para la representación y, mediante el software apropiado, pasar a la realidad virtual (como *NeoTrie VR*) y aumentada creando un museo virtual de la rima, además de impartir cursos y talleres.

Referencias

- [1] www.lamusicadelasesferas.es.
- [2] *Álabe. Revista de la Red de Universidades Lectoras*.
- [3] *Arte y educación en contextos multidisciplinares* (capítulo 34, pág. 665)

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Con motivo del número 50 de nuestro Boletín vamos a realizar unas reseñas especiales dedicadas a dos textos que ya se encuentran descatalogados y que solo es posible encontrar en librerías de segunda mano —aunque uno de ellos puede adquirirse en un edición original en inglés—.

Los textos reseñados tienen características muy dispares. El primero de ellos, el libro de Richard Courant y Herbert Robbins *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales* y el segundo, *Veinte matemáticos célebres*, de Francisco Vera.

¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.

Richard Courant y Herbert Robbins.



Ficha Técnica

Editorial: Fondo de Cultura Económica.
662 páginas.
ISBN: 978-16-6717-4.
Año: 2002.

Si tuviera que elegir un libro de mi biblioteca relacionado con las matemáticas, probablemente *¿Qué son las matemáticas?* sería uno de los tendría en consideración.

En mi modesta opinión, este magnífico texto debería ocupar un lugar destacado en las estanterías de una persona apasionada por las matemáticas.

La primera edición se publicó allá por el año 1941 pero ha tenido varias reimpresiones y revisiones. La última, que es la que comento en esta reseña, fue realizada por el hijo de Richard Courant, Ernest, en colaboración con el famoso divulgador matemático Ian Stewart. En esta revisión se presentan algunos avances que Courant y Robbins no habían incluido en su texto original.

Richard Courant (1888–1972) fue un matemático alemán, discípulo de Hilbert, que tuvo que huir de la Alemania nazi estableciéndose en Estados Unidos, Herbert Robbins (1915–2001), coautor del texto, americano especializado en estadística.

¿Qué tiene este texto que lo hace tan especial? Para mí, tiene la virtud de tratar conceptos matemáticos complejos partiendo siempre de conocimientos básicos.

En principio, cualquier persona con la base matemática adquirida en el bachillerato puede comenzar a leer los capítulos que, progresivamente, nos van presentando conceptos más complejos de forma autosuficiente.

Esto implica que el lector necesita implicarse y trabajar el texto, pero el desarrollo de los temas está planteado de tal manera que no es necesario ser una persona experta en matemáticas para poder abordar los temas.

A modo de ejemplo, en el capítulo tercero se abordan los clásicos problemas griegos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Courant

y Robbins tratan los dos primeros de una forma muy elegante, asequible a un público general. La resolución del problema de cuadratura del círculo —que implica la demostración de la trascendencia de π — supera el nivel del libro y los autores solamente lo mencionan brevemente dando algunas indicaciones breves.

El libro aborda casi todos los campos de la matemática: teoría de números, álgebra, análisis, geometría o topología, siempre a través de cuestiones concretas, no teorías generales.

Por desgracia, que yo tenga constancia, a día de hoy solamente es posible encontrar este texto en su versión original en inglés. En castellano hay que recurrir a las tiendas de segunda mano o a las bibliotecas públicas. Por cierto, la biblioteca Nicolás Salmerón de la Universidad de Almería dispone de un ejemplar en castellano de la quinta edición publicada en 1979.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Veinte matemáticos célebres.

Francisco Vera.



Ficha Técnica

Editorial: Los libros del Mirasol.
153 páginas.
Año: 1961.

El segundo texto que he elegido para esta edición especial de las lecturas recomendadas es *Veinte matemáticos célebres*, del matemático extremeño Francisco Vera Fernández de Córdoba, del que se hizo una breve semblanza en el número 2 del volumen XIII de este Boletín, y que se publicó en enero de 2020.

Francisco Vera (1888–1967) fue un matemático español bastante desconocido para el gran público, esencialmente porque nunca se dedicó a la academia y, además, porque

gran parte de su vida la pasó exiliado debido a su compromiso con el gobierno legítimo de la República después del golpe de estado de 1936.

Aunque en la obra de Vera hay textos matemáticos, el grueso de ésta se centra en la historia de la ciencia y de las matemáticas.

Vera era un hombre enciclopédico. Su textos históricos están muy documentados y son muy exhaustivos.

Este librito —pues se trata de un ejemplar de pequeñas dimensiones— se publicó en Argentina en 1961 y recoge las conferencias que Vera impartió en Colombia en el año 1942.

En el prólogo, el autor comenta la motivación y la génesis de esta obra: *«Alguno de los asistentes a aquel cursillo tuvo la gentileza de facilitarme las notas que habían tomado. Con ellas y mis guiones personales pude reconstruir aproximadamente las conferencias, que vieron la luz en Barranquilla, en 1942.»*

Veinte matemáticos célebres se aleja de las exposiciones exhaustivas a las que estamos acostumbrados en textos como los de Morris Kline o Carl B. Boyer. De una

forma muy didáctica y amena se acerca a los perfiles de 20 matemáticos, enmarcándolos en su contexto histórico.

Vera presenta a los personajes protagonistas de una forma muy original, por parejas conectadas de alguna manera.

Así pues en los diez capítulos de que consta el texto aparecen los duos Abel-Galois, Monge-Fourier, Tartaglia-Cardano, Weiertrass-Sonja Kowalewski (sic), Descartes-Fermat, Newton-Leibniz, Cayley-Sylvester, Riemann-Boole, Lobatschewki-Hamilton (sic) y Maurolico-Commandino.

En definitiva, una de esas gemas que nos podemos encontrar amontonadas en una librería «de viejo» y que usualmente pasan desapercibidas. Si usted la ve alguna vez por ahí, no dude en hacerse con ella, disfrutará de la historia de la matemática de una forma diferente.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Páginas web y redes sociales

Aula Abierta de Matemáticas



matematicasiesoja.wordpress.com

Las Matemáticas Recreativas son un eficaz elemento motivador en el aula y fuera de ella para aprender matemáticas. Además, aparecen en la historia de las Matemáticas y, de una u otra forma, en los planes de estudios de la mayoría de las universidades del mundo, incluida la de Almería. La página web [Aula Abierta de Matemáticas](#) las usa para desarrollar sus contenidos fundamentales.

Nos ofrece un menú matemático empleando acertadas metáforas gastronómicas. No faltan los habituales apuntes divididos por cursos de ESO y de Bachiller, así como abundantes ejercicios resueltos y comentados. Sin embargo, esta página destaca por sus complementos.

Aparecen apartados de motivación para aprender matemáticas, cosa no demasiado usual. También hay incursiones en el mundo del cine y de la música y el arte, en general. Se exponen aplicaciones a ciencias afines como la Física o la Botánica. Se pone de manifiesto la importancia del juego y del reto en muchos de los descubrimientos históricos de las matemáticas.



Aparte del amplísimo contenido de temas que expone este portal, lo mejor es la manera desenfadada y, a la vez, profunda y seria, en la que se explican los temas. Hay enlaces interesantes en las atractivas imágenes y animaciones que ilustran sus comentarios.



Nos parece una página altamente recomendable para los amigos de las matemáticas a todos los niveles.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

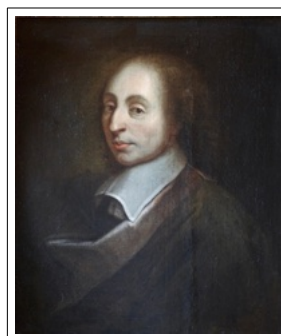
Citas Matemáticas

«Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico».

«Navegamos dentro de una vasta esfera, siempre a la deriva de la incertidumbre, llevados de un extremo a otro».



Leonhard Euler (1707–1783), matemático suizo.



Blaise Pascal (1623–1662), matemático, físico, filósofo y teólogo francés.

Acertijos

Una sustancia muy sensible

El desarrollo de un experimento científico requiere c gramos de una cierta sustancia que debe administrarse con suma precisión a lo largo del tiempo. Las fracciones de c que han de aplicarse cada 24 horas se especifican en la siguiente tabla:

Día	Cantidad	Referencia
1	$\frac{c}{2}$	$1 \cdot 2$
2	$\frac{c}{6}$	$2 \cdot 3$
3	$\frac{c}{12}$	$3 \cdot 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

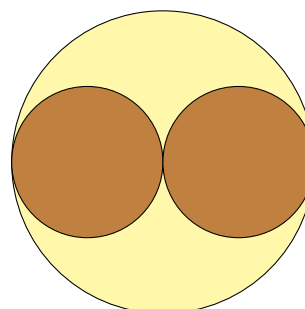
¿Qué fracción de c se aplicará el día 30? ¿Podrías determinar la fracción de c que se habrá consumido al cabo de esos 30 días?

(En el próximo número aparecerá la solución.)

Propuesto por Juan Carlos Navarro Pascual
Universidad de Almería

Solución al acertijo del número anterior

En la figura que sigue, teníamos que comparar las áreas de color amarillo con las de color marrón (que representaban las porciones de vainilla y chocolate de una tarta de cumpleaños):



Sea r el radio de los círculos marrones y R el del círculo que los contiene. Si A_T , A_v y A_c son el área total, el área conjunta de los fragmentos coloreados de amarillo y el área que suman los fragmentos de color marrón, respectivamente, es claro que

$$A_T = A_v + A_c.$$

Por tanto,

$$A_v = A_T - A_c = \pi R^2 - 2\pi r^2 = 4\pi r^2 - 2\pi r^2 = 2\pi r^2 = A_c.$$

Se pone así de manifiesto que las áreas representadas por ambos colores son idénticas.

Resuelto por Juan Carlos Navarro Pascual
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Apasionadas por las matemáticas

Experiencias en el día de la Mujer y la Niña en la ciencia

Iván José Acien Martín

Manuel Álvarez Molina Prados

Juan Fco. Cuevas Rodríguez

Andrea Estrada Escáñez

Rocío Guillén Manzano

Estudiantes de Grado en Matemáticas de la UAL

El próximo 11 de febrero se celebra el *Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia*. Con motivo de esto, hemos recogido comentarios y experiencias de algunas mujeres dentro del departamento de Matemáticas: Ana Belén Castaño Fernández y María de Gádor Cabrera Padilla.

Ana Belén



Ana Belén Castaño

¿Cómo decidiste dedicarte a la enseñanza de las matemáticas?

Cuando era pequeña me debatía entre Medicina y Matemáticas. Sin embargo descubrí que en Medicina tenía que estudiar unos 7 años y no me gustó la idea, por lo que decidí estudiar Matemáticas. A día de hoy me parece gracioso, ya que dada mi carrera enfocada en la docencia

e investigación voy a estar toda mi vida estudiando.

¿Existen mujeres matemáticas que te hayan inspirado a lo largo de tu carrera?

Mari Luz por ser la primera catedrática matemática de la UAL. Inma López y Helena Martínez Puertas me han ayudado mucho a nivel formativo y de cara a la docencia. Las admiro muchísimo por su forma de ser. Maribel ha conseguido mucho a nivel de igualdad en la universidad.

¿Cómo abor das la brecha de género que a veces se percibe en disciplinas STEM?

A nivel de investigación no he percibido esa brecha. Sin embargo, trabajo mucho en motivar a estudiantes, especialmente niñas, de institutos a través de charlas y contando mi propia experiencia sobre cómo he llegado a estar dónde estoy, haciendo ver que ellas y ellos también son capaces de llegar a donde se propongan con esfuerzo.

¿Has experimentado desafíos específicos como mujer en la enseñanza de matemáticas?

He vivido alguna experiencia desagradable por parte de alumnos, pero veo conveniente mantener la compostura y mostrarse respetuosa ante esas situaciones y responder en otro momento haciendo ver lo equivocados que están.

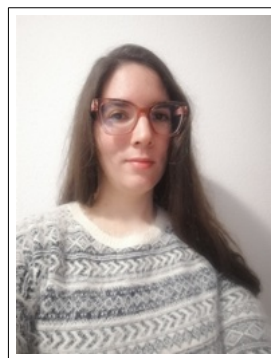
Mari Gádor

¿Cómo crees que tu perspectiva como mujer influye en la experiencia educativa de los estudiantes?

Hay trabajos, en general, en los que estás acostumbrado a ver más hombres que mujeres, por ejemplo en educación superior. Es decir, los hombres elaboran más labores docentes que las mujeres. Siempre habrá algún comentario o alguien que se sorprenda sobre esto.

¿Has observado algún cambio en la representación de mujeres en el ámbito académico desde que comenzaste tu carrera?

Comencé la carrera con una mayoría de mujeres. La tendencia que observo en ciencias económicas, en determinados sectores (como informática), es que estamos lejos del equilibrio. Desde las matemáticas, todo está ajustándose poco a poco, y va aumentando en paridad. En las carreras de ciencias económicas, la cosa está más o menos pareja, pero las notas más altas vienen de alumnas que quieren hacer las cosas bien, y les ha calado el mensaje de abrir la mente.



Mari Gádor Cabrera

¿Cuál es tu enfoque para motivar a estudiantes, especialmente a mujeres a seguir carreras en matemáticas?

Mi idea es romper con las ideas anteriores respecto a lo que son las mates en el colegio y el instituto. No quiero decir que los profesores del colegio y el instituto hagan una mala labor (todos estamos regidos por el tiempo, la labor, etc). Felicito a estos

docentes por su buena labor y su preocupación por sus alumnos, y precisamente porque sean capaces de usar las matemáticas para tener una visión mucho más amplia del mundo.

Quiero romper con esas cosas de hacer las cuentas y ya. El grado enseña a que las matemáticas no son esto. Mi idea es pensar las cosas y razonar, de aprovechar las herramientas que tenemos para dar solución tanto a ejercicios del tema como a los problemas de la vida misma. Este cambio de «chip» les funciona y les genera una satisfacción que los motiva a seguir indagando en esa manera de pensar. Muchos alumnos me han agradecido haberles enseñado esto.

¿Qué consejo le darías a las mujeres jóvenes que están considerando estudiar matemáticas o seguir una carrera académica en esta disciplina?

Hay una tendencia hacia las ciencias experimentales, de ser un mundo reservado a unos pocos. Eso genera en el público que recibe asignaturas de esta rama, inseguridad y frustración. Si verdaderamente a una chica le gusta este mundo y lo disfruta después de haber trabajado duro, que

siga hacia adelante.

Lo importante es seguir adelante, a pesar de todo el trabajo y el esfuerzo que conlleve hacerlo. La pasión por algo lleva a conseguir buenos profesionales en la materia. Que nadie les desmotive. Sería una pena que, por presión social, el mundo se perdiera grandes profesionales. Hay que tener los pies en la tierra, y hay que ser consciente de la situación. Las cosas que apasionan no se realizan porque vayamos a ser millonario, sino por tu amor por ellas.

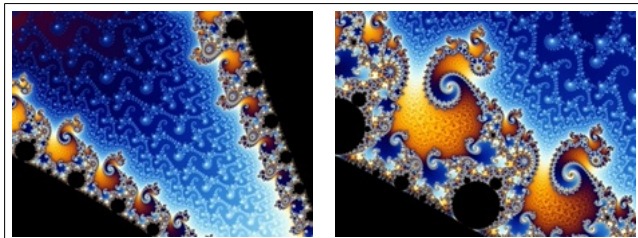
TERRITORIO ESTUDIANTE

Representación del arte matemático

Eduardo Sorroche Sánchez

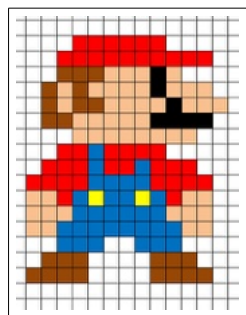
Estudiante del Grado en Matemáticas de la UAL

Desde que somos pequeños, muchos de nosotros nos hemos hecho la misma pregunta en el colegio, en el instituto: «¿Para qué sirven las matemáticas?» Siempre recibimos respuestas como «para que funcionen los ordenadores» o «para darle rigor a otras ciencias». Aunque estas respuestas son ciertas, se quedan un poco cortas, ya que las matemáticas sirven para hacer de todo, y el arte no es una excepción, como veremos a continuación. Observemos, por ejemplo, las siguientes imágenes:



Creado por Wolfgang Beyer con el programa Ultra Fractal 3

¡Increíbles, ¿verdad?! Estas imágenes son generadas mediante procesos matemáticos que, aunque no son aleatorios, resultan bastante caóticos. A continuación, veremos cómo representarlos, no sin antes destacar que las dos imágenes anteriores provienen del conjunto de Mandelbrot, descubierto y estudiado por Benoît Mandelbrot (Polonia, 1924–Estados Unidos, 2010), considerado el principal propulsor del auge del campo de estudio matemático conocido como fractales.



Mario representado en una matriz

Para representar estas imágenes, haremos uso de una de las herramientas más útiles de las matemáticas: las matrices. Al asignar un color a cada posición de la matriz, podemos generar una imagen que muestra en pantalla la matriz con sus colores asignados.

De acuerdo, hemos entendido, aunque sea de forma muy superficial, cómo representar una imagen haciendo uso de matrices. Ahora cabe preguntarse: ¿Cómo

Las experiencias y perspectivas de Ana Belén y María de Gador ofrecen una visión valiosa sobre el papel de las mujeres en el campo de las matemáticas. A medida que celebramos el *Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia*, es inspirador reflexionar sobre el impacto positivo que estas investigadoras y profesoras tienen en la formación de las mentes matemáticas del futuro. Su dedicación y pasión por la enseñanza y la investigación abren puertas y desafían estereotipos, contribuyendo al avance de la igualdad de género en el ámbito académico. ■

asignamos los colores a la matriz para representar conjuntos como el de Mandelbrot? Para responder a esta pregunta, primero debemos saber qué es el conjunto de Mandelbrot.

Definamos la función $f(z) = z^2 + c$ con $z, c \in \mathbb{C}$.

El conjunto de Mandelbrot son los $c \in \mathbb{C}$ tales que al evaluar $f(z)$ comenzando en cero e iterar en el resultado obtenido indefinidamente, el resultado no diverge, es decir, el conjunto de Mandelbrot son los $c \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión $(f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots)$ no diverge.

Para saber cuando un número no pertenece a este conjunto, haremos uso de la capacidad computacional de ordenador y del siguiente enunciado deducido del teorema 1 del enlace [1] de la bibliografía.

Si en el proceso de iteración obtenemos un resultado con módulo mayor o igual a $r = \max\{3, \|c\|\}$, entonces, c no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

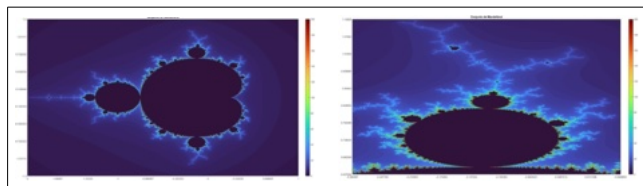
Veamos un ejemplo de cómo usar el enunciado. Para ello tomemos $f(z) = z^2 + 3$, entonces, $r = 3$. Comencemos a componer: $f(0) = 3$ con módulo 3 que es igual a r . Por lo tanto, 3 no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Ahora que sabemos qué es el conjunto de Mandelbrot y cómo determinar cuándo un número no pertenece a dicho conjunto, ya estamos preparados para aprender cómo representarlos. Si observamos el caso anterior, solo necesitamos realizar una iteración para comprobar que 3 no pertenecía al conjunto de Mandelbrot, pero esto no será siempre así; para otros números, podríamos necesitar un mayor número de iteraciones. Lo que haremos será asignarle un color a un número complejo en función del número de iteraciones necesarias para probar que no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Tomamos una matriz de números complejos (correctamente seleccionados) y realizamos, por ejemplo, 100 iteraciones para cada número en la matriz. Cuantas menos iteraciones necesite un número para probar que no pertenece al conjunto de Mandelbrot, más azulado será el color que le asignaremos. Por el contrario, cuantas más iteraciones necesite para probarse, o si con 100 iteraciones no se ha demostrado (ya sea porque no pertenezca al conjunto de Mandelbrot o porque se necesiten más de 100 iteraciones

para probarlo), se le asignarán colores más rojizos.

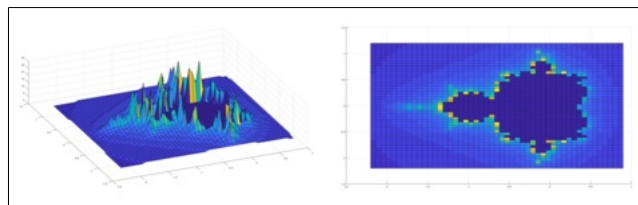
Veamos un sencillo ejemplo de resultados obtenidos mediante este proceso, usando el sistema *MatLab*.



Cabe destacar que, aunque hemos decidido asignar un color a un número complejo en función de su «número de iteraciones divergencia», podemos asignarle otros colores o incluso una altura en función de dicho «número de iteraciones de divergencia» para obtener otra representación de dicho conjunto. El resultado obtenido cambiará según cómo deseemos representarlo.

Es necesario mencionar que dicho proceso se puede utilizar también para representar otras estructuras fractales que se construyen de forma similar, como por ejemplo,

los conjuntos de Julia. Por otro lado, este proceso aparece desarrollado, tanto para conjuntos de Julia como para conjuntos de Mandelbrot, en un trabajo que realicé y del cual llevé a cabo una exposición para la asignatura de Simulación Numérica del Grado en Matemáticas en la UAL y que es la razón principal para la realización este artículo.



Representación del conjunto de Mandelbrot usando alturas. La segunda imagen es dicha representación vista desde arriba

Referencias

- [1] *Mates facil*. Página web.

Responsables de las secciones

❖ ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN LA UAL

- *Actividades organizadas*: Helena Martínez Puertas (hmartinez@ual.es) y Sergio Martínez Puertas (spuertas@ual.es).
- *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Inmaculada López García (milopez@ual.es).

❖ DE LA ENSEÑANZA MEDIA A LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

- *Experiencias docentes*: David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Pilar Gámez Gámez (mpgamez75@gmail.com) y Belén Ortega Sánchez (bortega@sek.es).
- *Enseñanza bilingüe*: Daniel Prados Torrecillas (plurilinguismo.dp.al.ced@juntadeandalucia.es).
- *Concurso de problemas*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnave@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).

❖ ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

- *Experiencias docentes*: Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez (climent@ddcc.uhu.es) y Isabel María Romero Albadalejo (imromero@ual.es).

❖ DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorrecci@ual.es).
- *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jlopez@ual.es), Francisco Luzón Martínez (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón Cerdán (asalmero@ual.es).
- *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
- *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlorodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).
- *Citas matemáticas*: Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgroz@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).

■ *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual
(jcnnav@ual.es).
◆ TERRITORIO ESTUDIANTE: Iván José Acién Martín
(ivanacien.tecno18@gmail.com), Manuel Álvarez

Molina Prados (mam562@inlumine.ual.es), Juan Fco.
Cuevas Rodríguez (juanfco04cr@gmail.com), Andrea
Estrada Escánez (aee622@inlumine.ual.es) y Rocío
Guillén Manzano (rocioguillenmanzano@gmail.com).

Aviso legal

Las opiniones expresadas en esta revista son las de los autores, y no representan necesariamente las del equipo editorial del *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*.

Los derechos de copyright de los artículos publicados pertenecen al *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*. Cualquier persona física o jurídica que desee utilizar una parte o la totalidad de algún artículo, podrá hacerlo citando la fuente de referencia y su autor o autores.