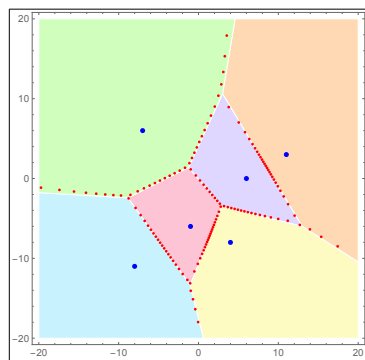




El teorema más bonito del mundo

«... en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas». Esta rotunda afirmación aparece en el libro *Apología de un matemático*, del matemático inglés Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

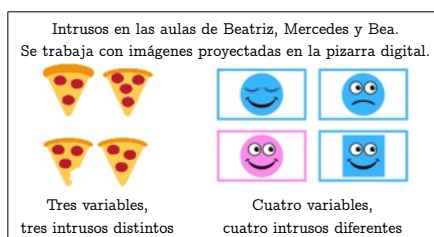
Hardy —personaje que no necesita presentación en el mundo matemático— valoraba, sobre todo, la belleza intrínseca de las matemáticas. Esta afirmación es comparada por la mayoría de las personas que amamos las matemáticas.

Al hilo de esta reflexión, Juan Luis Varona, matemático y profesor de la *Universidad de La Rioja* nos presenta en este número del Boletín un resultado que hace honor a la afirmación de Hardy.

(Ver artículo en la página 15)

Buscando intrusos en el aula de infantil

Resumen



En el número de octubre de 2023 incorporamos al Boletín de forma permanente una sección dedicada a experiencias que se realizan relacionadas con las matemáticas en las etapas educativas de Primaria e Infantil.

Desde ese momento hemos recibido contribuciones muy valiosas que han ampliado el campo de acción de la revista y podemos decir con orgullo que hemos conseguido abarcar todo el ámbito docente de nuestra disciplina.

En este número tenemos un interesantísimo artículo que nos han enviado tres profesoras de la Comunidad de Madrid en el que nos presentan una experiencia docente con niños y niñas de tres, cuatro y cinco años.

(Ver artículo en la página 7)

Editorial: Matemáticas desde la convivencia

Bienvenidos a este nuevo número de *El Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*. Es un placer encontrarnos de nuevo en estas páginas dedicadas a explorar la belleza y el poder de las matemáticas. En cada artículo buscamos despertar la curiosidad y mostrar que las matemáticas son una forma de entender el mundo que nos rodea.

Hablando de entender el mundo, hoy queremos reflexionar sobre un tema que, lamentablemente, está de actualidad: el acoso o *bullying* en nuestros entornos educativos.

El *bullying* no es un juego de niños, es una violencia que se esconde en los pasillos, en los silencios, en los móviles. Como docentes, como compañeros o como comunidad educativa debemos colaborar para erradicar esos comportamientos que perjudican a alumnos y alumnas, dificultando la convivencia.

Desde este Boletín hacemos un llamamiento a que nuestras aulas sean espacios seguros, donde nadie tenga miedo de ser quien es y donde el respeto sea una constante. ¡Que disfrutéis de la lectura!

Actividades matemáticas p. 2

Enseñanza primaria p. 7

Enseñanza secundaria p. 9

Concurso de problemas p. 13

Divulgación matemática p. 15

Territorio estudiante p. 25

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Entrega del premio del Boletín

El pasado 16 de octubre, Juan José Moreno Balcázar e Isabel María Ortiz Rodríguez visitaron el *IES Juan Goytisolo* de Carboneras con motivo de la entrega del premio del Concurso de Problemas del Boletín a Diego Haro Vicente.



El ganador con profesores y compañeros

Durante la visita, tuvieron la oportunidad de conversar con varios estudiantes quienes expresaron su interés por cursar el Grado en Matemáticas o el Doble Grado en Matemáticas y Economía en la *Universidad de Almería*.

También hubo tiempo para hablar con los profesores, algunos de ellos antiguos estudiantes de Matemáticas en la UAL. Fue una visita muy enriquecedora, en la que les alegró especialmente descubrir el entusiasmo y la vocación matemática de los jóvenes.

X Concurso IndalMat

La *Universidad de Almería* celebró el 10 de octubre la décima edición del concurso de resolución de problemas matemáticos *IndalMat*, destinado a estudiantes de 4.º de la ESO y Bachillerato de toda la provincia.



Un momento de la actividad

En esta edición, participaron 597 estudiantes procedentes de 44 centros educativos, enfrentándose a un desafío que busca fomentar el pensamiento lógico y preparar a los jóvenes para la Olimpiada Matemática Nacional, organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME).

Los ganadores de cada categoría, uno por curso, se darán a conocer el próximo 18 de noviembre.

Tras la prueba, los asistentes disfrutaron de la conferencia *¡Vivan los algoritmos!*, impartida por Clara Grima, profesora de la *Universidad de Sevilla*, quien habló sobre la utilidad de los algoritmos en el mundo actual, especialmente en el contexto de las redes sociales y la inteligencia artificial.

Noche europea de los investigadores 2025

El pasado 26 de septiembre se celebró, por decimocuarto año consecutivo y de forma simultánea en casi 400 ciudades europeas, la *Noche Europea de los Investigadores*. Esta iniciativa tiene como objetivo acercar la investigación a la ciudadanía, mostrando los beneficios que aporta a la sociedad.



Investigadores de la actividad Matemáticas: la ciencia que mueve el mundo

En Almería, el evento fue organizado por la *Universidad de Almería* y contó con la participación de 491 investigadores e investigadoras, quienes compartieron su trabajo de manera rigurosa y amena mediante 69 actividades de diversas áreas del conocimiento. Además, se llevaron a cabo más de 20 actividades previas en 30 centros educativos de la provincia.



Público asistente al stand

En el ámbito de las Matemáticas, destacó el stand de *Matemáticas: La ciencia que mueve el mundo*, organizado por miembros del Departamento de Matemáticas y que contó con la colaboración de estudiantes de cuarto del Grado en Matemáticas. Con actividades lúdicas y divulgativas se puso en valor el papel esencial que desempeña la investigación matemática en numerosos aspectos de la vida cotidiana. La actividad fue todo un éxito.

Visita del nobel de física Kip Thorne a la Universidad de Almería



Kip Thorne

Los días 5 y 6 de mayo, la Universidad de Almería recibió la visita de Kip Thorne, Premio Nobel de Física 2017, reconocido por sus aportaciones sobre ondas gravitacionales y astrofísica.

Durante su estancia, Thorne recorrió el campus y mantuvo un encuentro cercano con el equipo decanal y con grupos de investigación de la *Facultad de Ciencias Experimentales*. En esta reunión, expresó su apoyo al nuevo Grado interuniversitario en Física, impulsado junto a la Universidad de Huelva. Como recuerdo, se instaló una placa conmemorativa en el hall del CITE III.



Un momento de la conferencia

Kip Thorne también participó en un acto donde se proyectó la película *Interstellar*, basada en sus teorías científicas. Al finalizar, se celebró un coloquio en el que el público pudo dialogar directamente con el físico, en un encuentro tan divulgativo como inspirador.

En su segunda jornada en la Universidad de Almería, Kip Thorne ofreció la conferencia *El papel de la Física en el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la tecnología*, dirigida a estudiantes y profesorado. El acto fue un éxito de participación.



Kip Thorne con el decano de la Facultad de Ciencias Experimentales, Juan José Moreno Balcázar

Tras su conferencia, Kip Thorne compartió una comida distendida con cinco estudiantes y cinco docentes e investigadores de la *Universidad de Almería*, cerrando así una visita memorable.

Los estudiantes de Huelva del Grado en Física visitan la UAL

El curso académico 2025/26 ha comenzado con la implantación del nuevo Grado interuniversitario en Física, compartido entre la *Universidad de Almería* (UAL) y la *Universidad de Huelva* (UHU). Esta innovadora propuesta ha tenido una excelente acogida, con una nota de corte de 11,668.



Recepción de los estudiantes en la UAL

El programa permite a los estudiantes de las dos universidades, cursar el primer año en su universidad de origen, el segundo en la UAL, el tercero en la UHU y el cuarto según la especialidad elegida.

Para fomentar el vínculo entre campus, los estudiantes de Huelva visitaron la UAL los días 18 y 19 de septiembre. El primer día tuvieron una recepción académica en la Facultad y el segundo fueron recibidos de forma institucional por el Rector.

Entrega de premios de la Fase local de las Olimpiadas Científicas 2025

El pasado 11 de junio, la *Universidad de Almería* celebró el acto de entrega de premios a los 15 estudiantes ganadores de las Olimpiadas de Matemáticas, Química, Física, Geología y Ciencias Ambientales, organizadas por la Facultad de Ciencias Experimentales.



Acto de entrega de premios

Más de 400 escolares de casi 70 centros de secundaria participaron en estas competiciones. Los premiados en la Olimpiada de Matemáticas fueron María Ruiz, María Hernández y Pablo Megías. ¡Enhorabuena!

VI Campus Tecnológico para chicas

Del 1 al 10 de julio, la *Universidad de Almería* acogió la sexta edición del *Campus Tecnológico para chicas*, una iniciativa orientada específicamente a alumnas de ESO con el objetivo de fomentar su interés en áreas científico-tecnológicas.



Inauguración del campus

Organizado por el Vicerrectorado de Igualdad, Inclusión y Compromiso Social de la UAL, el evento ha contado con la participación de 90 estudiantes, quienes han disfrutado de una experiencia inmersiva e innovadora, a través de talleres, actividades prácticas y encuentros con referentes femeninos, concluyendo con la elaboración de un proyecto tecnológico propio realizado por equipos.

Matemáticas en la empresa

El pasado día 28 de octubre, Úrsula Gil Escobar, del *BCC Grupo Cajamar* y antigua alumna de la titulación de Matemáticas de la UAL, impartió una charla a los estudiantes del grado titulada *El uso de Matlab en el contexto del cálculo de instrumentos financieros*.

En la conferencia se abordó el empleo de esta potente herramienta para diseñar, simular y evaluar instrumentos financieros. Además, se discutieron las ventajas de Matlab y se mostraron ejemplos prácticos.

Actividades de la SAEM Thales

La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM), a la que pertenece la *SAEM Thales*, está organizando las siguientes actividades:

- *Concurso Canguro Matemático 2026* para estudiantes de ESO y Bachillerato, y para estudiantes de Primaria. Se celebrará el 24 de marzo de 2026. Más información en canguromat.es.
- *XXII JAEM 2026: Un viaje al interior de las matemáticas*, que se celebrará en Jaén, del 1 al 4 de julio de 2026. Más información en 22.jaem.es.

Noticias matemáticas

Columnas de divulgación matemática

Los periódicos almerienses *Diario de Almería* e *Ideal* publican regularmente artículos de divulgación científica en colaboración con la *Facultad de Ciencias Experimentales*. Los relacionados con las matemáticas, desde la publicación del último número del Boletín, son:

- *Matemáticas y posvedad*, por Juan Cuadra Díaz (09/05/2025).
- *¿Nos ha hecho el apagón ver la luz?*, por Fernando Reche Lorite (30/05/2025).
- *El futuro es ciencia de datos*, por Ana Devaki Maldonado González (03/07/2025).
- *Matemátic@s: ¿gente rara?*, por Juan José Moreno Balcázar (25/07/2025).
- *Helados, medusas y paradojas estadísticas*, Por Rafael Cabañas de Paz (24/09/2025).
- *Matemáticas y poder*, por Enrique de Amo Artero (17/10/2025).

Los decanos de Matemáticas advierten del deterioro de la enseñanza matemática en España

La *Conferencia de Decanos de Matemáticas* ha expresado su preocupación por el nivel de competencias matemáticas del alumnado preuniversitario, reflejado en los últimos informes nacionales e internacionales. En el comunicado, en el que ha participado Juan José Moreno Balcázar, decano de la *Facultad de Ciencias Experimentales* de la UAL, se señalan cinco causas principales: inestabilidad de las políticas educativa, reducción de horas lectivas, cambios constantes en asignaturas, metodologías poco efectivas y un sistema de selección docente insuficiente.

Los decanos subrayan la urgencia de tomar medidas, como reforzar el aprendizaje desde etapas tempranas, actualizar contenidos con enfoque aplicado, revisar metodologías y garantizar un profesorado altamente cualificado¹.

Máster propio en Ciencias de Datos y Matemática Computacional

El *Centro de Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa* (CDTIME) ha lanzado la primera edición del *Máster de Formación Permanente en Ciencia de Datos y Matemática Computacional*, dirigido a titulados en disciplinas científicas interesados

¹Puedes consultar el comunicado en [/www.ual.es/application/files/2617/5914/2065/NOTA_DE_PRENSA-Def.pdf](http://www.ual.es/application/files/2617/5914/2065/NOTA_DE_PRENSA-Def.pdf).

en especializarse en análisis de datos y modelización matemática.

El máster, completamente online, ofrece 60 créditos ECTS distribuidos en 18 módulos, con formación avanzada en matemática aplicada, estadística, programación científica e ingeniería de datos, con un enfoque práctico orientado a problemas reales ².

XIV Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales



Logo de la actividad

Los días 13 y 14 de noviembre se celebrará la decimocuarta edición del *Simposio de Investigación de la Facultad de Ciencias Experimentales*, enmarcado en las actividades por san Alberto Magno. El evento está dirigido a jóvenes investigadores y busca fomentar la colaboración entre grupos de investigación en áreas como Biotecnología, Ciencias Ambientales, Matemáticas y Química.

Se premiarán las mejores comunicaciones flash seleccionadas entre los pósteres presentados, con cuatro premios de 300 euros y otros adicionales según participación. También se entregarán los premios a mejores expedientes de grado y el premio UAL-RSME.

La conferencia de San Alberto será impartida por Francisco Román Villatoro Machuca bajo el título *¿Por qué me dicen que llego tarde si no existe el tiempo?*, donde abordará distintas técnicas históricas para medir el tiempo. Más información en www2.ual.es/isimpos.

Premios de investigación san Alberto 2025

Con motivo de la festividad de su patrón, la *Facultad de Ciencias Experimentales* ha convocado los *Premios de investigación san Alberto 2025*, un reconocimiento a los mejores artículos de investigación publicados en revistas de alto impacto (Q1), en cualquiera de las categorías de ciencias del *Journal Citation Report*.

En esta ocasión se repartirán 13 premios de 250 euros cada uno y diploma, distribuyéndose 3 de ellos en cada uno de los campos de conocimiento de Biotecnología, Ciencias Ambientales, Matemáticas y Química, y reservándose el premio restante para el campo de Física.

Los premiados en el campo de las matemáticas han sido Pedro Jesús Martínez Aparicio, Antonio Jesús Martínez Aparicio y Rubén Fifiñana Aránega, que presentaron los artículos *On the stability of the PPH subdivision scheme on nonuniform grids*, *Intervals of bifurcation points for semilinear elliptic problems* y *Existence, nonexistence and multiplicity of bounded solutions to a*

nonlinear BVP associated to the fractional Laplacian, respectivamente.

Los galardonados impartirán una charla de 5 minutos sobre su artículo premiado en una jornada que se celebrará el 7 de noviembre.

Jornada de Puertas Abiertas del Departamento de Matemáticas 2025

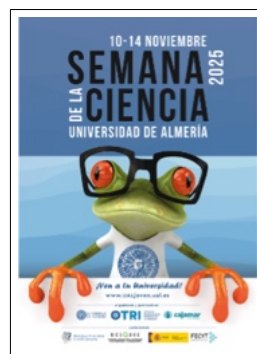
El 31 de octubre el Departamento de Matemáticas de la UAL celebra su tradicional Jornada de Puertas Abiertas.

El acto ha comprendido dos conferencias invitadas: *Un breve recorrido matemático a través de grandes genios científicos y polifacéticos*, impartida por Juan Matías Sepulcre Martínez de la *Universidad de Alicante*, y *¿Cómo se hace un teorema?*, a cargo de Salvador Villegas Barranco, de la *Universidad de Granada*.

El programa de la jornada se puede consultar pinchando [aquí](#).

Semana de la Ciencia 2025

Del 10 al 14 de noviembre, la *Universidad de Almería* celebrará la *Semana de la Ciencia 2025*, dirigida a estudiantes de 4.º de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y centros de menores de la provincia.



Cartel anunciador

Organizada a través de la Unidad de Cultura Científica e Innovación (UCC+i) y de la OTRI, su objetivo es acercar la ciencia a los más jóvenes y despertar en ellos vocaciones científicas.

En esta edición se ofrecen veintiocho talleres de marcado carácter lúdico-divulgativo, entre los que se encuentra la actividad *Stat Wars: La Rebelión de los datos*, organizada por profesores

del Departamento de Matemáticas.

La programación se completa con el tradicional *Café con Ciencia*, comprendido por seis charlas de temáticas diversas que facilitan un primer contacto personal y amigable con científicos de la UAL ³.

Día Mundial de la Estadística

El 20 de octubre se celebró la cuarta edición del *Día Mundial de la Estadística*, una efeméride que se conmemora cada cinco años para poner en valor el papel fundamental de la estadística en el desarrollo del conocimiento y la toma de decisiones.

Bajo el lema *«Impulsando el cambio con estadísticas y datos de calidad para todos»*, las cinco Comisiones Regionales de las Naciones Unidas celebraron una maratón mundial de seminarios web para mostrar cómo los datos

²Toda la información se puede consultar en sites.google.com/ual.es/masterdatamat.

³Toda la programación en www.ual.es/otri/divulgacion-cientifica/semana-de-la-ciencia-2025.

impulsan el desarrollo sostenible y la toma de decisiones inclusivas.

La *Sociedad de Estadística, Investigación Operativa y Ciencia de Datos* (SEIO) también se sumó a la celebración con actividades que recorrieron las distintas dimensiones de la estadística: investigación, educación y profesión.

Fallecimiento de Rainer Weiss

El físico estadounidense de origen alemán Rainer Weiss falleció el pasado 25 de agosto en Cambridge (Massachusetts), solo unos días antes de cumplir los 93 años.



Acto de nombramiento como doctor honoris causa de Rainer Weiss en la Universidad de Almería

Considerado una figura central de la física contemporánea, Weiss recibió en 2017 el Premio Nobel de Física y fue investido en 2018 doctor *honoris causa* por la Universidad de Almería.

Desde el Boletín lamentamos su pérdida. Su figura permanecerá viva en nuestra memoria y unida al espíritu de la UAL.

Premio Ruth I. Michler 2025/26

La *Asociación de Mujeres en Matemáticas* ha otorgado el *Premio Conmemorativo Ruth I. Michler 2025–2026* a Ling Xiao, por sus logros en investigación en análisis geométrico y ecuaciones en derivadas parciales.

La galardonada es profesora en la *University of Connecticut*, y ha realizado importantes contribuciones en el estudio de flujos de curvatura y geometría en distintos espacios.

Este premio, dirigido a mujeres en la etapa intermedia de su carrera académica, le permitirá realizar una estancia de investigación durante un semestre en la *Cornell University*.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a Daniela

Bubboloni, de la Università degli studi di Firenze; Daniel Bulacu, de la Universidad de Bucarest (Rumania); Elena V. Carreras-Casanova, de la Universidad Rey Juan Carlos; Paolo Malanchini, de la Università degli Studi di Milano-Bicocca/Pavia (Italia); y Miguel Piñar, de la Universidad de Granada.

Preguntas frecuentes

Como estudiante de la UAL, ¿qué tipo de becas puedo solicitar durante la realización de mis estudios?

A lo largo de tu etapa universitaria existe la posibilidad de solicitar diferentes tipos de becas o ayudas al estudio, tanto propias de la *Universidad de Almería* como otras de carácter nacional. Además, algunas de ellas presentan requisitos académicos, mientras que otras disponen de requisitos socioeconómicos. A continuación, destacamos algunas de ellas:

- **Beca MEFPD:** Se trata de la beca de carácter general del *Ministerio de Educación y Formación Profesional y Deportes*.
- **Beca UAL de Excelencia:** Esta beca propia de la *Universidad de Almería* está dirigida a los estudiantes de nuevo ingreso con los mejores expedientes académicos.
- **Programas Talento D-UAL y Apadrina Talento:**

Estas ayudas tienen como objetivo facilitar la realización de prácticas en empresa durante los estudios de Grado, mejorando la empleabilidad del alumnado. El programa Talento D-UAL está dirigido a estudiantes de último curso, mientras que Apadrina Talento está orientado a estudiantes de primer curso.

- **Becas de movilidad:** Permiten que los estudiantes puedan realizar una movilidad en otras universidades, tanto nacionales como internacionales. Entre los programas más destacados se encuentran Erasmus+ y SICUE.
- **Beca de colaboración en departamentos:** Esta ayuda de carácter nacional está destinada a estudiantes de último curso de Grado o primer curso de Máster. Su finalidad es fomentar la iniciación en tareas de investigación y colaboración dentro de los departamentos universitarios mediante la realización de un proyecto tutorizado.

- **Otras ayudas propias de la UAL.** La *Universidad de Almería* también ofrece diferentes ayudas específicas, entre ellas, becas de apoyo al estudio, para la certificación de idiomas, alojamiento o para deportistas.

Me gustaría realizar un doctorado en la Universidad de Almería, ¿puedo solicitar alguna ayuda económica durante esta etapa?

La realización de los estudios de doctorado requiere una gran dedicación a la formación investigadora y a la adquisición de otras competencias transversales. Entre los diferentes tipos de ayudas que puede solicitar el doctorando, destacamos en primer lugar las principales ayudas de carácter nacional: las ayudas FPU y FPI.

Las ayudas FPU (Formación de Profesorado Universitario) son convocadas anualmente por el *Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades*, mientras que las ayudas FPI (Formación de Personal Investigador) están asociadas a proyectos de investigación de la *Agencia Estatal de Investigación*. Ambas ayudas predoctorales,

además de financiar la formación investigadora del doctorando también permiten realizar labores de docencia. Por otra parte, la *Universidad de Almería* también ofrece la posibilidad de solicitar una ayuda predoctoral del Plan Propio de Investigación y Transferencia.

¿Preparado para la próxima Olimpiada Matemática?

Como cada año, la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) organiza una nueva edición de la Olimpiada Matemática Española, dirigida a estudiantes de Bachillerato (o estudiantes de cursos inferiores avalados por sus profesores). La LXII edición se celebrará del 12 al 15 de marzo de 2026 en Las Rozas (Madrid). Antes de llegar a la fase nacional, los participantes deberán superar dos etapas previas: una fase local, que tendrá lugar el viernes 16 de enero, y la fase autonómica, prevista del 6 al 8 de febrero. Los interesados en una buena preparación para la OME podéis solicitar información en el correo electrónico indalmat@gmail.com. ¡Os animamos a participar!

ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

Buscando intrusos en el aula de infantil

Liliana Lorenzo

Mercedes Balsa

CEIP San Isidro (Aranjuez, Madrid)

Beatriz Álamo

CEIP Carlos III (Aranjuez, Madrid)

Las normativas curriculares nos indican que en nuestras aulas de Educación Infantil tenemos que trabajar las nociones lógico-matemáticas de clasificación y ordenación de colecciones. Estas nociones son clave para ayudar a nuestro alumnado a desarrollar el arte de razonar o argumentar; no solo para que puedan entrar en el mundo de las matemáticas, sino también para que sean capaces de desenvolverse críticamente en el mundo en el que vivimos.

Los conjuntos son la base de las matemáticas en todos sus niveles y temas. Definirlos, representarlos de diferentes formas, entender bien cuándo un elemento está o no en un conjunto y por qué, y buscar relaciones entre sus elementos son aspectos clave para el aprendizaje matemático y el desarrollo integral del alumnado. Es importante facilitar este trabajo con colecciones en contextos cercanos y atractivos, fomentando la manipulación en un ambiente positivo y alegre, y, a su vez, manteniendo el rigor en el uso del lenguaje matemático.

Presentamos aquí una situación de aprendizaje implementada en nuestras aulas para trabajar con colecciones de objetos considerando lo descrito. Las actividades han sido diseñadas con estudiantes del Doble Grado de Maestro en Educación Infantil y Pedagogía de la *Universidad Complutense de Madrid* (UCM) y su formadora de Di-

dáctica de las Matemáticas. La situación también ayuda al alumnado a desarrollar la capacidad de concentrarse en una sola característica de un objeto y de seleccionar, dentro de la colección, los objetos que posean una determinada característica. Esto último es clave para clasificar y ordenar colecciones.

La situación está basada en el libro *Which one doesn't belong* (Danielson, 2016) y consiste en ofrecer a los niños y las niñas una colección de 4 elementos de forma que encuentren al intruso, argumentando su elección. Las colecciones están preparadas para que cada elemento pueda ser el intruso, dependiendo de la característica o variable de la colección considerada. La gran idea matemática que se trabaja es que *una misma colección puede ser organizada (clasificada) de diferentes maneras*.

Danielson trabaja con figuras geométricas. Nosotras llevamos la idea inicialmente a colecciones de objetos, para, ya en el último trimestre de la etapa, trabajar también con figuras geométricas. Con nuestro alumnado de 3 años, en primer lugar, trabajamos con objetos reales con los que estaban familiarizados, que podían observar y manipular, y considerando solo una característica cualitativa y un intruso en la colección dada. Después, fuimos introduciendo más características e intrusos progresivamente. Finalmente, trabajamos con las imágenes diseñadas por estudiantes de la UCM proyectadas en la pizarra digital que mostraban 4 objetos y 4 intrusos, como la propuesta original de Danielson, incluyendo también en uno de los casos una variable cuantitativa.

Organizativamente, comenzamos presentando la dinámica a todo el alumnado, sentado en corro alrededor del espacio donde una de nosotras mostraba la colección. Posteriormente, se llevó a un rincón para poder trabajar con uno o dos estudiantes cada vez, de forma que pudiéramos conseguir evidencias de aprendizajes individuales que nos permitieran adecuar las siguientes situaciones.

Las consignas que dimos a los niños y las niñas fueron las siguientes:

1. ¿Qué tenemos aquí delante? ¿Cómo son los objetos o los dibujos?
2. ¿Quién se ha colado?
3. ¿Por qué dices que se ha colado este?
4. ¿Se podría haber colado otro? ¿Por qué?
5. Al que se ha colado le llamaremos intruso.

La implementación de estas actividades en el aula, si bien al inicio puede requerir un ritmo de trabajo más pausado, favorece el desarrollo del razonamiento y la mejora de la expresión oral del alumnado. El hecho de que existan múltiples respuestas válidas y que los niños y niñas deban argumentar sus elecciones contribuye significativamente a

estos procesos. Nuestra experiencia ha evidenciado una mejora notable en ambos aspectos en todo el grupo de estudiantes.

Intrusos en el *rincón de la cocinita* del aula de Beatriz.

En cada fase se añade una nueva variable.

Se trabaja con colecciones manipulables.



Una variable, un intruso
(Aula de 3 años)



Dos variables, dos intrusos
(Aula de 3 años)

La variable color es muy usada en infantil en multitud de situaciones por lo que el alumnado la identifica automáticamente. Eso puede tener algunas limitaciones que hay que tener en cuenta tras observar sus respuestas. Nos pasó que un niño, a quien le gustaba mucho el color verde, decía que no había un intruso, que eran tres intrusos los que había en el rincón de la cocinita. Otros no podían seguir buscando intrusos en función de otra variable hasta que no se eliminaba físicamente el intruso de color.

Intrusos en el desayuno el *día de los lácteos* en las aulas de Liliana y Mercedes.

En cada fase se añade una nueva variable.

Se trabaja con una colección real: lácteos.



Una variable, un intruso
(Aula de 3 años)



Dos variables, dos intrusos
(Aula de 3 y 4 años)



Tres variable, tres intrusos
(Aula de 3 y 4 años)



Cuatro variables, cuatro intrusos
(Aula de 4 y 5 años)

En la colección de lácteos todos identificaban al yogur como un intruso al ser el único que no era «bebible». La forma es otro atributo con el que trabajan habitualmente en el aula. Al ver la colección de lácteos, alguno cogía el yogur en la mano y decía que no era «circulado» como los demás, que era «poco circulado» y que era también el único «con picos».

En tres años su capacidad de expresión oral a veces es más baja que su capacidad de identificar el intruso. Aunque todos identificaron la porción de pizza con «un bocao» como un intruso, solamente un niño señaló la porción de

pizza con 4 rodajas de tomate. Sin referirse al número, justificaba su elección diciendo que a él le encantaba el tomate, que él elegía esa porque la única con «más tomate».

Cuando fomentamos la argumentación, escuchar las respuestas de los niños y niñas nos permite comprender su manera de pensar, su lógica infantil, que en muchas ocasiones resulta más coherente que la de las personas adultas. A menudo, sus razonamientos nos sorprenden y nos hacen reír por su ingenio, lo que nos ayuda a diseñar intervenciones más ajustadas a sus necesidades y formas de razonamiento.

Intrusos en las aulas de Beatriz, Mercedes y Bea.
Se trabaja con imágenes proyectadas en la pizarra digital.

Tres variables,
tres intrusos distintos

Cuatro variables,
cuatro intrusos diferentes

Agradecimientos: a las estudiantes de la asignatura Juegos, materiales y situaciones con contenido matemático en

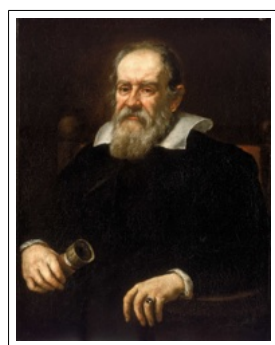
ENSEÑANZA SECUNDARIA

¿Para qué sirven las matemáticas?

José Manuel Bonillo Viciana
IES Ciudad de Dalías (Dalías, Almería)

Muchísimos docentes han escuchado esa pregunta innumerables veces y, dependiendo del nivel impartido, se han de escoger las palabras adecuadas para no provocar en la persona que ha formulado la pregunta un gesto que va desde la incredulidad hasta el escepticismo pues piensa que está siendo engañado. Aunque para gran parte de las personas a las que se pueden preguntar, las matemáticas constituyen un laberinto de fórmulas sin sentido y una materia que había que aprobar a toda costa, aunque no entendieran absolutamente nada de lo que se estuviera haciendo.

¿Cómo se puede entender que están presentes en cada gesto diario y más en este mundo tan tecnológico, rápido y con la necesidad de la inmediatez en donde estamos? No se trata de resolver raíces cuadradas, logaritmos o las más temidas ecuaciones; ¿cómo se puede hacer ver que en la música que escuchan muchos jóvenes está presente, en la simetría de una flor, en la tela de una araña, en la manera en la que ponen los semáforos en una ciudad o cuando responden a un estado o reaccionan en las redes sociales?



Galileo Galilei

«Las Matemáticas son el lenguaje en el que está escrito el Universo».

Las Matemáticas permiten tener un pensamiento estructurado y prepara a nuestro cerebro para realizar un análisis pormenorizado de una situación (a título personal, en las disertaciones al alumnado siempre digo «si puedo hacer que no os engañen, ya voy por buen camino») y, en el sentido más amplio, como dijo Galileo Galilei

Educación Infantil del Doble Grado en Maestro en Educación Infantil y Pedagogía de la *Universidad Complutense* de Madrid, curso 2023–24 y a su profesora, Nuria Joglar Prieto. A Sofía Gutiérrez por la edición de las imágenes.

Referencias

- [1] Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book, Teacher's Guide with Student Book*. Routledge.

Para dar respuesta a la pregunta inicial, ¿por dónde se puede empezar? Hay tantas clases de matemáticos (unos son amantes de la lógica más extrema, otros desean transmitir sus conocimientos de forma más divulgativa, otros aman la investigación en campos académicos...) que cada uno puede dar una versión propia de la importancia que tienen para ellos.

Si se empezase por lo más básico, se podría decir que una de las necesidades primarias del ser humano ha sido comprender y controlar el mundo que le rodeaba y, aunque poseía la noción de cantidad (distinguir entre pocos y muchos) como ciertos seres vivos tales como los cuervos, palomas y chimpancés, representar esas cantidades y sobre todo el «contar», es una facultad exclusiva (por ahora) del ser humano.

Para poder ejercer ese control o esa comprensión, el ser humano necesitó poder representar la idea que tenía en la mente a algo fácilmente manipulable, aunque para ese paso necesitó un avance verdaderamente digno de un titán: la correspondencia uno–uno. Aún hoy en día, tribus de Papúa Nueva Guinea, para pedir los seis collares nupciales se van tocando los dedos de una mano hasta llegar a la muñeca.

Este detalle, junto con otros que corroboran este avance en el pensamiento humano puede consultarse en el número 1 del volumen VII del Boletín ⁴.

Una vez creados, ¿qué se puede hacer con ellos? Ante esa pregunta, el alumnado se queda con las operaciones básicas pues está acostumbrado desde los niveles inferiores a realizar cálculos aritméticos sin descanso y de forma mecánica (cosa que es buenísima para la mente pues la mantiene despierta), explicando en parte su animadversión para la materia.

Pero lo realmente interesante y bonito que tienen las Matemáticas es el poder de la abstracción, no restringirse solamente a lo que se ha definido para poder aplicarlo de manera inmediata, sino que permite avanzar más.

Para demostrar este hecho, se puede poner de manifies-

⁴ Los números. Una necesidad inevitable del ser humano cuyo autor es Daniel López Gutiérrez.

to que se puede demostrar lo que se está diciendo tomando a alumnado de Secundaria. Concretamente, alumnado de 1.º de ESO en la Unidad de Programación concerniente a Números Naturales y Sistemas de Numeración o alumnado de 2.º de ESO en la Unidad de Programación concerniente a la Evaluación Inicial y Números Enteros.

Como ejemplo sin divagar más, solicitemos que un alumno o alumna diga un número, usando el Sistema de Numeración posicional, de cuatro cifras con la siguiente condición: las cuatro cifras no pueden ser la misma. Ahora, una vez que ya se ha formado dicho número de cuatro cifras (atención, solo se ha usado la construcción de los números tal como los conocemos hoy) se pide lo siguiente: forme el mayor número que se puede hacer usando esas cuatro cifras y el menor que se puede formar. Finalmente, se resta al mayor, el menor formado. Repita ese proceso.

Es decir, supongamos que he escogido el número 1979. Entonces, aplicando el proceso que se ha especificado:

- $1979 \rightarrow 9971 - 1799 = 8172$.
- $8172 \rightarrow 8721 - 1278 = 7443$.
- $7443 \rightarrow 7443 - 3447 = 3996$.
- $3996 \rightarrow 9963 - 3699 = 6264$.
- $6264 \rightarrow 6642 - 2466 = 4176$.
- $4176 \rightarrow 7641 - 1467 = 6174$.
- $6174 \rightarrow 7641 - 1467 = 6174 \dots$

No importa el número de cuatro cifras que se escoja (cumpliendo la condición de no ser las cuatro cifras iguales), siempre estabiliza en un número en concreto. ¿Cómo ha sido eso posible?

Que conste que solo se ha usado un concepto básico, la formación de números usando nuestro Sistema de Numeración posicional y una de las operaciones más básicas que es la sustracción. Este número se denomina *Constante de Kaprekar* de cuatro cifras y la operación iterativa indicada se denomina *Operación de Kaprekar*⁵. Tal vez sea una mera curiosidad que tiene relación con la parte de las Matemáticas dedicada a la Aritmética, pero podemos hacernos una idea del potencial que tienen.

En la siguiente figura se muestran el número de pasos que se requiere para alcanzar la constante de Kaprekar para los valores de 0 a 9999 divididos en filas de longitud 100⁶.

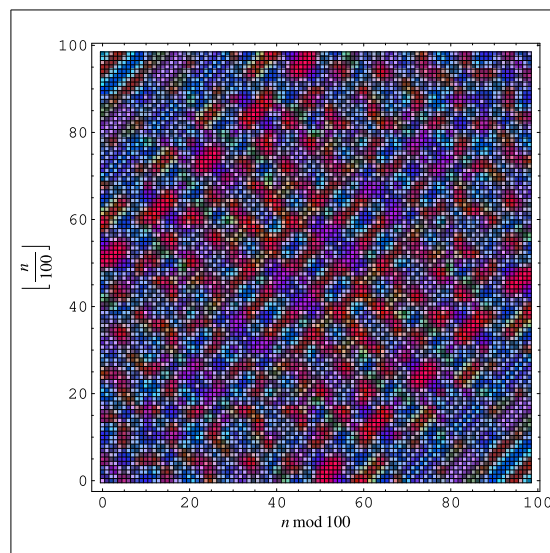


Imagen generada con Mathematica

Si nos basamos en lo que dijo Arquímedes «*Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo*» y entendemos el punto de apoyo como una idea de partida, será posible mover el mundo con los resultados que se pueden obtener.

Del mismo modo, el matemático Euclides de Alejandría dio una primera definición de número par de la siguiente forma: «*un número es par cuando se puede dividir en dos partes iguales*», dada en su obra *Los Elementos* en la Definición 6 y datada en el año 300 a. C.

Sobra decir que gran parte de la sociedad, tenga o no cultura matemática, sabe lo que es un número par y las aplicaciones que tienen como por ejemplo la disposición de los números de las casas en una calle determinada. Pero dio origen más de dos mil años después a la *Conjetura de Collatz* de la siguiente forma:

Dado cualquier número entero positivo n , realiza las siguientes operaciones:

1. Si n es par, haz $\frac{n}{2}$.
2. Si n es impar, haz $3n + 1$.
3. Repite proceso.

La curiosidad es que, por ahora, ya que no se ha conseguido una demostración matemática, siempre se llega al 1 independientemente del número inicial.

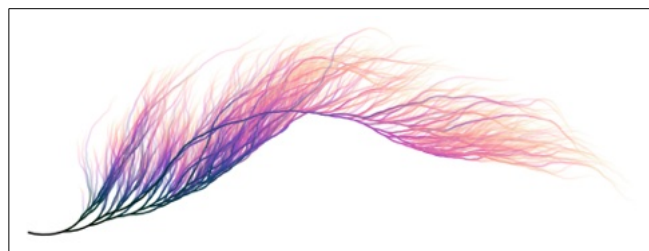


Imagen realizada con Mathematica basada en la conjetura de Collatz

A la vista de estos dos resultados que aparentemente no sirven para nada en concreto, se puede extraer una

⁵Si se quiere profundizar, véase el artículo *Constante de Kaprekar* en Wikipedia.

⁶Más información en mathworld.wolfram.com/KaprekarRoutine.html

conclusión: Las Matemáticas y todas las disciplinas que las forman no solo ayudan a entender la realidad circundante, abstrayendo a un lenguaje propio sino que abre nuevos campos de conocimiento (teoría de grafos, topología algebraica...), permite avances en tecnología (línea de trans-

misión, resonancia magnética nuclear...) y deja abierto el camino para nuevas aportaciones que las enriquezcan como dijo Newton «*He visto más lejos que nadie porque me subí a hombros de gigantes*». ■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

European Day of Languages

Cristina García Segura

IES Sol de Portocarrero (Almería)

The Challenge of Teaching Math... in English!

Many would agree with me that teaching mathematics presents a challenge, as it has traditionally been considered a difficult subject. This idea has been perpetuated over time, so much so that for a large part of the population, the simple fact of hearing the word evokes a certain aversion or, at the very least, leads to facial expressions showing displeasure.



In our school, Mathematics is taught bilingually (in English) in the 3rd and 4th years of compulsory secondary education. It is not uncommon, when we introduce the subject to students, to hear the phrase: “Math... and in English too!” Consequently, a significant part of our work in those first few days of the term involves trying to make the students see that English is no more (and no less) than a language we use to communicate—including when discussing mathematics. As if that were not enough, mathematics also has its own language...

Math as a Universal Language

Taking advantage of the fact that European Day of Languages is celebrated on September 26th, we ran an activity in class where we started by reflecting on the most widely spoken languages in the world, with both Spanish and English ranking among the top four.

Then, the question arises: Can we think of another language that can be understood globally?

We showed the students a series of problem statements written in languages they did not know (Mandarin, Fin-

nish, Malay...). These were then followed by a mathematical problem to solve. Although we always emphasize that you must read the problem to know what the exercise is asking you to do, this time we were lenient because there was no choice: what they understood was only what was written in mathematical language!

We certainly have not been the first to realize this...

Some quotes highlighting the power of mathematical language include Galileo Galilei's assertion that “*Mathematics is the language in which God has written the universe*”, and Stefan Banach's statement that “*Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit*”.

Other sources emphasize its role in understanding the universe, such as Edward W. Ngai's quote stating that mathematics is “indispensable” to our technological society, and Albert Einstein's description of pure mathematics as “*the poetry of logical ideas*”.

Do not let us be fooled by the fact that these assertions were made by people connected to science and mathematics in some way... Artists who excelled in literature, a discipline which is too often considered to be far away from mathematics, were able to recognise the importance of mathematical language:

- “*Numbers constitute the only universal language*” — Nathanael West.
- “*Mathematics allows for no hypocrisy and no vagueness*” — Stendhal.
- “*‘Obvious’ is the most dangerous word in mathematics*” — Eric Temple Bell

Once our students were convinced of the importance and utility of mathematical language, we took a historical journey through the evolution of algebraic language, ranging from rhetorical algebra to the present day.

We talked about the development of algebraic language as a fascinating journey that transformed a purely rhetorical, word-based practice into the concise, symbolic system we use today. This evolution can be broken down into distinct stages, each marked by the contributions of different cultures and mathematicians.



Classroom board

This way, well known names such as the Egyptian Rhind Papyrus, Diophantus of Alexandria, Brahmagupta, René Descartes or Cardano arose, and led us to think about their important contributions to the development of algebraic language:

1. We spent some time translating some of the problems from the Rhind Papyrus into modern algebraic language. Here is an example: “A quantity, and its half, and its third, and its seventh, and all of these added to 24, gives 70. What is the quantity?”.



2. We learnt that Diophantus (3rd century AD) is considered by many to be the “father of algebra”. He was a key figure in the transition from rhetorical algebra to symbolic algebra. In his work, *Arithmetica*, he introduced a notation that used abbreviations for the unknown quantity and its powers, and even for subtraction. However, his notation was not fully symbolic, and he only sought positive rational solutions, giving way to Diophantine problems, some of

which we also talked about. Diophantine problems are a special class of problems where the solutions are required to be integers. For instance:

- Find all positive integers x and y such that $3x + 5y = 47$.
- Find all integer solutions to the equation $x^2 - 4y^2 = 12$.
- A farmer buys 100 animals for €100. Cows cost €10, pigs €3, and chickens 50 cents. How many of each did the farmer buy?
- Find two positive integers whose sum is 100 and whose greatest common divisor is 10.

Another famous example is Fermat’s Last Theorem, which states that no three positive integers a , b , and c can satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for any integer value of n greater than 2.

3. The shift to a fully symbolic language was a gradual process that gained importance in the medieval period and Renaissance. We learnt that the first person to propose a method for solving the quadratic equation that we would recognize as such was the Indian mathematician Brahmagupta in the 7th century AD, but his formula only provided the positive solution.
4. We discussed the origin of “ x ”: the common use of “ x ” to represent an unknown variable in mathematics is widely attributed to the French philosopher and mathematician René Descartes.

In his 1637 work, *La Géométrie* (The Geometry), Descartes wanted to create a standardized system for algebraic notation. He proposed using the first letters of the alphabet (a, b, c) to represent known quantities, and the last letters (x, y, z) for unknown variables. While he used all three letters (x, y, z), “ x ” became the most popular for a few key reasons:

- Convenience for printers: Some historians and typographers believe that the letter “ x ” was less frequently used in French and Latin texts at the time, so printers had more “ x ” type characters available. This made it a convenient and readily accessible symbol to use.
- Descartes’s own Preference: It is also plausible that Descartes simply used “ x ” more often in his examples, leading to its widespread adoption by others who studied his work.

Regardless of the exact reason, Descartes’s choice of notation was revolutionary. It moved mathematics from a rhetorical or syncopated form (using words or abbreviations) to a fully symbolic form. This symbolic system made complex algebraic problems much easier to write, read, and manipulate, setting the stage for the development of modern algebra.

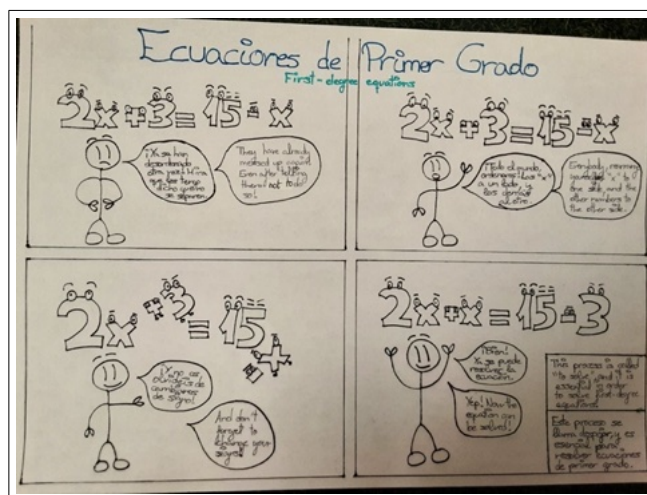
The use of “x” is also believed to have originated centuries later from the translation of the Arabic texts of the often called “father of algebra”, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, into European languages. In his influential book *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa'l-Muqabala*, he referred to the unknown as “al-shay”, which is the Arabic word for “the thing” or “something”.

Some historians theorize that Spanish scholars, translating al-Khwarizmi’s work, did not have a letter to represent the “sh” sound in “al-shay”. They may have used the Greek letter chi (χ), which looks like a Latin “x”, to represent the unknown. This transcription eventually evolved into the letter “x” we use today.

This transition from a word (“al-shay”) to a symbol (“x”) marks a key step in the development of algebra from a descriptive, prose-based discipline into the concise, symbolic language we know.

- We took a look at Cardano’s Rule: In the 16th century, Girolamo Cardano published a formula for finding the roots of a cubic equation, which he had received from fellow mathematician Niccolo Fontana Tartaglia. Known as Cardano’s Rule, first published in 1545 in his book *Ars Magna*, this method was a major breakthrough as it was the first general solution for cubic equations, although it had a flaw when it led to “casus irreducibilis” involving the square roots of negative numbers. We discussed

the advantages and disadvantages of this formula, compared with the well known one to solve second-degree equations (the same one they complain so much about), having our students convinced that this last formula they have to learn in the second year of compulsory secondary education is not so bad, in fact.



Finally, after so much exhausting talking, we challenged the students to create a comic strip explaining a specific mathematical concept or fact. Here are some of the results. Certainly our classroom is a bit nicer since then...

We hope you enjoy our mathematical art in some way, too! ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Un satélite orbita la Tierra sobre el Ecuador a 986,68 km de altura. En cierto momento, cuando se encuentra en la vertical de la Ciudad Mitad del Mundo (situada al norte de Quito, sobre la línea ecuatorial), desde el satélite se percibe la salida del Sol en un punto P del Ecuador, ubicado al este de dicha ciudad.

- ¿A qué distancia, desde el satélite, se encuentra el punto P?
- ¿Cuál es la distancia, medida sobre el Ecuador, entre la Ciudad Mitad del Mundo y el punto P?
- ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir, desde el instante mencionado, para que amanezca en la Ciudad Mitad del Mundo?

Téngase en cuenta que el radio de la Tierra en el Ecuador es de unos 6378 km.

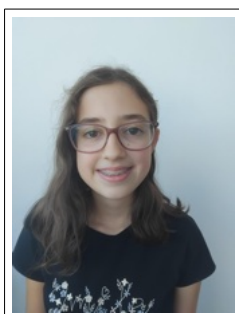
Si nos envías tu solución a este problema **puedes obtener** un estupendo **reloj inteligente (smart-watch)** y un regalo relacionado con las matemáticas.

¡La solución más elegante u original tiene premio! Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico del Boletín bmatema@ual.es **hasta el 16 de enero de 2026**. Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior



Ana Callejón

En esta edición del concurso, el jurado ha considerado que la solución ganadora ha sido la enviada por Ana Callejón Hernández, estudiante de tercero de ESO del *IES Juan Goytisolo* de Carboneras.

Además, se ha otorgado un accésit a Marta Díaz Nieto, alumna de segundo de Bachillerato del *Centro Educativo Agave* de Almería.

Animamos a todos los estudiantes a que participen en este concurso enviándonos sus soluciones al problema propuesto.

Problema propuesto en el número anterior

Una empresa de reparto local, «Entregas Rápidas del Andarax», está probando drones para entregar paquetes pequeños en Almería.

Tienen un centro de operaciones (almacén) situado en lo que consideraremos el origen de coordenadas, $A = (0, 0)$ (en kilómetros). Necesitan hacer una entrega urgente a un cliente en la posición $B = (15, 5)$. El dron vuela en línea recta a velocidad constante y tiene una batería que le permite una autonomía máxima de 35 km.

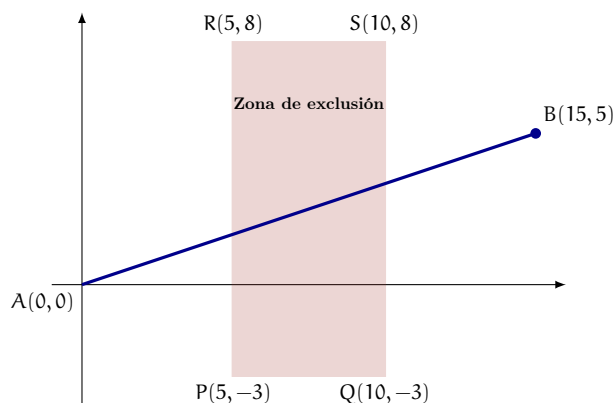
El aeropuerto ha establecido una zona de exclusión aérea sobre un área rectangular. Esta zona está definida por los vértices: $P = (5, -3)$, $Q = (10, -3)$, $R = (5, 8)$, $S = (10, 8)$. El dron no puede entrar en el espacio aéreo sobre este rectángulo en ninguna circunstancia.

El equipo de logística necesita vuestra ayuda para determinar si este reparto es viable y cuál es la mejor estrategia. Preguntas:

1. Comprobad si la ruta directa en línea recta desde el almacén (A) hasta el cliente (B) atraviesa la zona de exclusión.
2. Suponiendo que el dron vuela siempre en segmentos rectos, calculad la ruta más corta y la distancia total que debe recorrer el dron (ida y vuelta).
3. ¿Puede el dron realizar el viaje completo (ida y vuelta) de forma segura sin entrar en la zona de exclusión?
4. Si la zona de exclusión no existiera, ¿cuánto tiempo de vuelo se ahorraría en el viaje completo (ida y vuelta) suponiendo que el dron vuela a una velocidad constante de 60 km/h?

Solución ganadora:

Para resolver el primer apartado, representamos con coordenadas el problema:



En la representación podemos ver:

- Origen de coordenadas: $A(0, 0)$.
- Lugar de entrega: $B(15, 5)$.
- Zona de exclusión: cuadrilátero de vértices $P(5, -3)$, $Q(10, -3)$, $R(5, 8)$ y $S(10, 8)$.

Trazando el segmento $\overline{AB}$ comprobamos que toca la zona de exclusión.

Una vez representado y solucionado gráficamente, vamos a expresarlo analíticamente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (15, 5) - (0, 0) = (15, 0) \\ A &= (0, 0)\end{aligned}$$

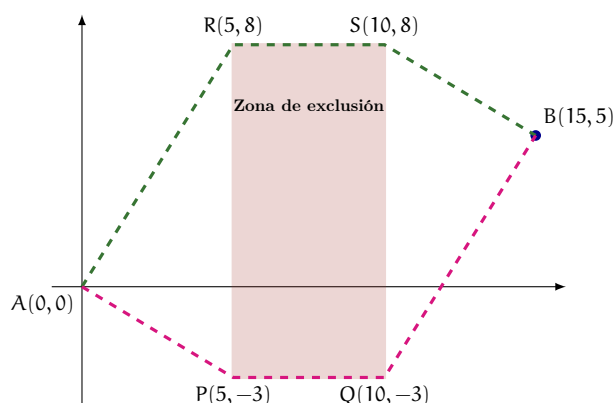
Con estos elementos podemos calcular la ecuación de la recta

$$\frac{x-0}{15} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$$

Desarrollando la ecuación sabiendo que $x = 5$ tenemos que $y = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$.

Esto significa que $\overrightarrow{AB}$ toca por primera vez la zona de exclusión en el punto $(5, \frac{5}{3})$.

Veamos ahora el segundo apartado, calcularemos la ruta más corta suponiendo que el dron siempre vuela en segmentos rectos.



Veamos la ruta $\overline{ARSB}$. Tenemos que calcular el módulo de cada uno de los vectores y sumarlos para averiguar la distancia recorrida en esta ruta.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= (5, 8), \\ |\overrightarrow{AR}| &= \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} \approx 9,43 \text{ km}, \\ \overrightarrow{RS} &= (5, 0), \\ |\overrightarrow{RS}| &= \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ km}, \\ \overrightarrow{SB} &= (5, -3), \\ |\overrightarrow{SB}| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5,83 \text{ km}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por el dron (ida y vuelta) es:

$$2(|\overrightarrow{AR}| + |\overrightarrow{RS}| + |\overrightarrow{SB}|) = 2(\sqrt{89} + 5 + \sqrt{34}) \approx 40,52 \text{ km}.$$

Veamos ahora la ruta $\overline{APQB}$. Con un razonamiento análogo al realizado en la ruta anterior, tenemos que $\overrightarrow{AP} = (5, -3)$, $\overrightarrow{PQ} = (5, 0)$ y $\overrightarrow{QB} = (5, 8)$.

Sus módulos son

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5,83 \text{ km}, \\ |\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{5^2} = \sqrt{5} = 5 \text{ km}, \\ |\overrightarrow{QB}| &= \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} \approx 9,43 \text{ km}.\end{aligned}$$

Como podemos ver, $\overline{AR} = \overline{QB}$, $\overline{RS} = \overline{PQ}$ y $\overline{SB} = \overline{AP}$. Esto hace que el resultado sea el mismo, por lo que hay una cierta simetría.

Pasemos ahora al tercer apartado. El dron no puede realizar el viaje completo de ida y vuelta sin entrar en la zona de exclusión ya que las rutas más cortas superan los 40 km y la autonomía es de 35 km.

Finalmente, resolvamos el cuarto apartado. Calculemos el tiempo que se tarda en recorrer las rutas mediante la fórmula $t = \frac{s}{v}$ ya que el dron viaja a velocidad constante.

- Ruta directa. La distancia a recorrer es $2|\overline{AB}| = 2\sqrt{250} \text{ km}$.

Por lo tanto,

$$t = \frac{2\sqrt{250} \text{ km}}{60} \text{ km/h} = \frac{\sqrt{10} \text{ km}}{6 \text{ km/h}} \approx 0,527 \text{ h}.$$

- Ruta más corta. La distancia a recorrer es $2|\overline{ARSB}| = 2(\sqrt{89} + 5 + \sqrt{34}) \text{ km}$.

Por lo tanto,

$$t = \frac{2(\sqrt{89} + 5 + \sqrt{34}) \text{ km}}{60 \text{ km/h}} \approx 0,675 \text{ h}.$$

La diferencia de tiempo entre ambas rutas es

$$|t_{\text{ruta } \overline{AB}} - t_{\text{ruta } \overline{ARSB}}| = |0,527 - 0,675| = 0,148 \text{ h}.$$

Si pasamos esa cantidad a minutos y segundos (que dejamos para los lectores), podemos afirmar que si tenemos que rodear la zona de exclusión, tardaríamos aproximadamente 8 minutos y 54 segundos más que si lo hiciéramos directamente.

Nota del jurado: La solución enviada por la ganadora ha sido recortada por cuestiones de espacio. Se han omitido otras trayectorias estudiadas que el jurado ha tenido en consideración a la hora de otorgar el premio.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

El teorema más bonito del mundo

Juan Luis Varona
Universidad de La Rioja

Seguramente, casi todos los matemáticos hemos oído alguna vez que el resultado más bonito de las matemáticas es

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esa fórmula, debida a Euler, relaciona, en una sola expresión muy simple, los cinco números más importantes de las matemáticas, 0, 1, i, e y π . Desde luego, hay muchos otros resultados matemáticos muy relevantes, muy útiles o influyentes, y muy bellos. Elegir unos cuantos o ponerlos en orden es, siempre, una cuestión de gusto.

A este respecto, merece la pena mencionar que, en otoño de 1988, la revista *The Mathematical Intelligencer* (vol. 10, no. 4), pidió a sus lectores que puntuaran, según su belleza, una serie de teoremas, y con la media de las calificaciones de las respuestas, se elaboró un *ranking* de 24 teoremas clasificados por su belleza, encabezados

por la fórmula de Euler antes citada, aunque escrita como $e^{i\pi} = -1$.

Otra recopilación bien conocida es la de Ian Stewart en su libro *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, que, como su nombre indica, destaca diecisiete ecuaciones que han tenido una gran relevancia en el progreso de la humanidad y en el desarrollo científico.

Pero no estamos aquí interesados por la belleza de los resultados matemáticos como tales, ni por la belleza de alguna ecuación que lleven aparejada, ni por su importancia dentro del campo de las matemáticas o de sus aplicaciones, sino por su belleza en algún tipo de gráfico asociado a un teorema.

Seguramente, muchos de los resultados matemáticos más bellos, desde el punto de vista gráfico, están relacionados con los conjuntos fractales o la teoría del caos. Es claro que, por ejemplo, los dibujos asociados al conjunto de Mandelbrot son preciosos. También lo son las cuencas

de atracción de, digamos, las tres raíces complejas de la ecuación $z^3 - 1 = 0$ cuando se aplica el método de Newton para intentar encontrarlas (nos volverá a salir esto más adelante). Pero, del mismo modo, aquí no hay un teorema tal que esos resultados sean, simplemente, una representación gráfica de lo que dice el teorema. Nosotros buscamos una asociación más directa. Es más, nos vamos a contentar con mostrar un solo teorema que cumple esas características. El lector, si lo desea, puede pensar cuál es su teorema o teoremas preferidos bajo esta condición.



Georg Pólya (1887–1985)

Lo que aquí vamos a exponer es un resultado no muy conocido debido al matemático húngaro Georg Pólya (con «no muy conocido» nos referimos, exclusivamente, a que no se suele ver en los cursos estándar del Grado en Matemáticas). Nacido en Bucarest en 1887, Pólya fue profesor de matemáticas de 1914 a 1940 en el Politécnico de Zúrich. Huyendo de los nazis, en 1940 se fue a Estados Unidos, igual que unos cuantos científicos húngaros muy relevantes. De 1940 a 1953 fue profesor en la Universidad de Stanford. Realizó contribuciones fundamentales en combinatoria, teoría de números, análisis numérico y teoría de la probabilidad. También destacó por su trabajo en heurística y educación matemática. Falleció en 1985, con 97 años de edad.

Hay numerosos resultados que llevan el nombre de Pólya. Aquí nos referiremos al que a menudo se conoce como *Pólya's shires theorem* (teorema de los condados de Pólya), que publicó, en alemán, en 1922 [2]; en [1] se puede consultar una demostración. Pero, antes de abordar el resultado de Pólya, tenemos que ver qué son los *diagramas de Voronoi*.

Lo que actualmente conocemos como diagramas de Voronoi los estudió, en 1907, el matemático ucraniano Gueorgui Voronoi. Un diagrama de Voronoi es una forma de dividir el plano en regiones basándose en la proximidad a un conjunto de puntos (se podría hacer también en el espacio n -dimensional, pero lo más usual, y lo que nos interesa ahora, es referirse al plano bidimensional con la distancia euclídea). Cada punto tiene una región asociada, que contiene todos los puntos del plano que están más cerca de él que de cualquier otro punto. En el plano euclídeo, la región de Voronoi para un punto p_j se construye fácilmente a partir de las intersecciones de los semiplanos formados al trazar las perpendiculares en el punto medio de los segmentos que unen p_j con los demás puntos p_k , con $k \neq j$.

Los diagramas de Voronoi tienen numerosas aplicaciones tanto en matemáticas como en otras ciencias. A veces, los diagramas de Voronoi se conocen por el nombre de teselación de Dirichlet, por el matemático alemán Gustav Lejeune Dirichlet, quien los estudió en 1850. Otro nombre

alternativo es el de *polígonos de Thiessen*, especialmente en el contexto de la geografía y la meteorología (la profesión de Alfred H. Thiessen), donde se usan para representar áreas de influencia.

Recordemos, además, que una función meromorfa en el plano complejo es una función f definida y derivable (holomorfa, en el lenguaje de la variable compleja) en todo $\mathbb{C}$ excepto en un conjunto de puntos aislados que son polos de la función (que un punto z_0 sea un polo de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ de f significa que $f(z)(z-z_0)^n$ tiene límite distinto de 0 cuando $z \rightarrow z_0$). Los ejemplos más sencillos de funciones meromorfas son las funciones racionales (los polos son las raíces del denominador); también son meromorfas las funciones $f(z) = e^z/z$, $f(z) = \cos(z)/(z-1)^2$ o la función Gamma. Pero no es meromorfa la función $f(z) = e^{1/z}$; está definida en todo el plano complejo exceptuando el origen $z = 0$, pero ese punto no es un polo de la función sino una singularidad esencial.

Con esto, ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de Pólya:

Teorema. *Los ceros de las derivadas iteradas de una función meromorfa en el plano complejo se acumulan en las aristas del diagrama de Voronoi del conjunto de los polos de la función.*

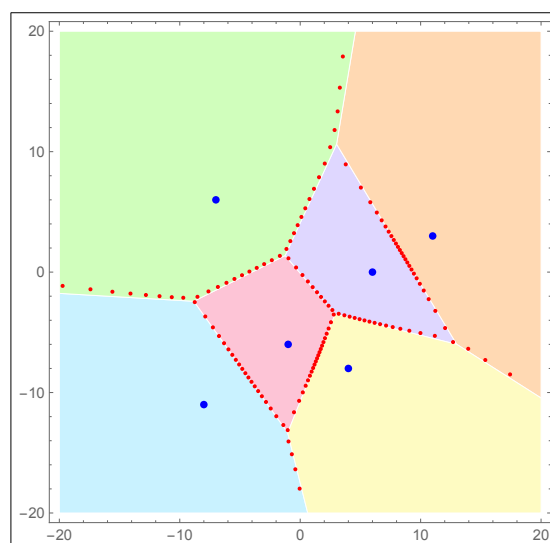
Vamos a ilustrar el teorema con un ejemplo. Tomaremos la función meromorfa

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)(z - p_4)(z - p_5)(z - p_6)}$$

cuyos seis polos son

$$\begin{aligned} p_1 &= -7 + 6i, & p_2 &= -1 - 6i, & p_3 &= 6, \\ p_4 &= -8 - 11i, & p_5 &= 4 - 8i, & p_6 &= 11 + 3i; \end{aligned}$$

lo que ocurre lo podemos ver en la figura adjunta.



El diagrama de Voronoi correspondiente a los seis polos (puntos azules) de determinada función meromorfa f , junto con los ceros de $f^{(3)}$ (puntos rojos).

En la figura, los polos de f son los puntos azules, y las regiones del diagrama de Voronoi de los polos están representadas con distintos colores. El teorema de Pólya nos dice que, cuando $n \rightarrow \infty$, los ceros de la derivada

n -ésima $f^{(n)}(z)$ tienden a las aristas del diagrama de Voronoi. En la figura se han representado, en rojo, los ceros de $f^{(30)}(z)$. Según el gusto del que esto escribe, no puede ser más bonito.

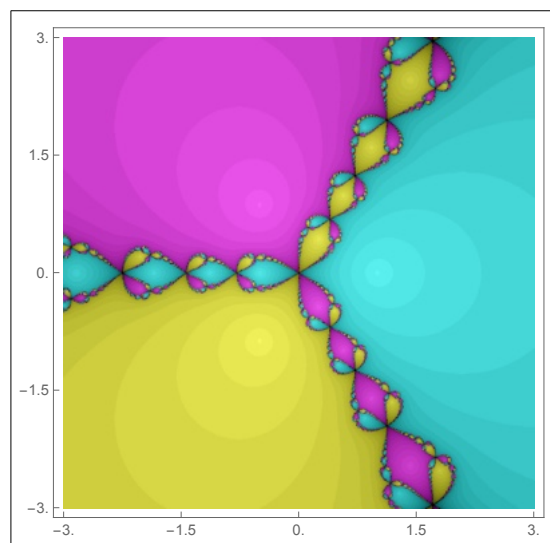
Por otra parte, este teorema es muy sorprendente. Recordemos que, si tenemos una ecuación $g(z) = 0$ y queremos encontrar una solución ξ , el método de Newton (también llamado método de la tangente, por su interpretación geométrica con funciones reales) parte de un punto z_0 e itera mediante

$$z_{k+1} = z_k - \frac{g(z_k)}{g'(z_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La idea es que, si partimos de un punto cercano a la raíz ξ de la ecuación $g(z) = 0$, y la función g es «buena» (en particular, derivable, claro), se cumplirá que $\lim_k z_k = \xi$. Fue a Cayley en 1879 al primero que se le ocurrió utilizar el método de Newton para hallar los ceros complejos de una función $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Él buscaba las condiciones bajo las cuales la sucesión $\{z_k\}_{k=0}^\infty$ iba a converger a un cero de g . En particular, denominemos cuenca de atracción de un cero ξ , al conjunto de todos los puntos $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que el método de Newton que comienza en z_0 converge a ξ . Entonces, Cayley estaba interesado en identificar las cuencas de atracción de cada cero de g . Resolvió el problema cuando g es un polinomio cuadrático; en ese caso, las cuencas de atracción son el diagrama de Voronoi de las dos raíces (aunque él no empleó esa terminología que aún no existía, claro). Pensaba que para polinomios cúbicos debería ocurrir algo similar pero, después de años de intentos, renunció a continuar. Ahora conocemos la naturaleza fractal del problema —incluso con polinomios de grado tres como $g(z) = z^3 - 1$, la frontera entre las cuencas de atracción es un intrincado fractal (un conjunto de Julia, para ser más exactos)— y comprendemos que el fracaso de Cayley era, en aquel tiempo, inevitable. Podemos ver estas cuencas de atracción en la figura adjunta. Para la ecuación $z^3 - 1 = 0$, las cuencas de atracción de los tres raíces $e^{2m\pi i/3}$, $m = 0, 1, 2$, están representados en cian, magenta y amarillo, y el color se hace más oscuro a medida que hacen falta más iteraciones

para alcanzar la raíz con cierta precisión requerida. En [3] se dan más detalles, y se pueden encontrar muchos más ejemplos de este tipo.



Las cuencas de atracción de las tres raíces complejas de la ecuación $z^3 - 1 = 0$.

Sobre todo para quien se encuentra por primera vez con el teorema de Pólya y ya conocía las dificultades de los métodos iterativos para encontrar raíces, resulta muy sorprendente que, en el caso del teorema de Pólya, las regiones que allí aparecen sean siempre un diagrama de Voronoi, en lugar de otro intrincado fractal.

Referencias

- [1] W. K. HAYMAN, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [2] G. PÓLYA, Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten, *Math. Zeit.* **12** (1922), 36–60.
- [3] J. L. VARONA, Graphic and numerical comparison between iterative methods, *Math. Intelligencer* **24** (2002), no. 1, 37–46.

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Jacob Bernoulli y la capitalización continuamente compuesta

Salvador Cruz Rambaud
 Universidad de Almería

Antonio Luis Rodríguez López-Cañizares
 Universidad de Granada

Jacob Bernoulli (1655–1705) fue un matemático suizo, nacido y fallecido en Basilea (Suiza). En realidad, nació el 27 de diciembre de 1654. Ahora bien, Suiza adoptó el calendario gregoriano en 1700 por lo que, con este calendario, habría nacido en 1655. Bernoulli fue el primero en

utilizar el término «integral» así como las coordenadas polares.

Su padre lo obligó a estudiar filosofía y teología, algo que no le agradaba, llegando a graduarse en la Universidad de Basilea, obteniendo un máster en filosofía en 1671 y una licenciatura en teología en 1676.

Mientras cursaba sus estudios universitarios, Jacob Bernoulli estudiaba matemáticas y astronomía contra la voluntad de su padre. Cabe destacar que esto fue habi-

tual en muchos miembros de la familia Bernoulli, quienes estudiaron matemáticas a pesar de la presión de tener que dedicarse a otras áreas del conocimiento. Sin embargo, Bernoulli inaugura la dinastía de matemáticos de la familia. Tres generaciones (algunos dicen que cuatro) de miembros de esta familia destacaron de una manera notable y constituyen un caso único en la historia de las matemáticas (Calinger, 1995).



Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli publicó cinco tratados sobre series infinitas entre 1682 y 1704. Los dos primeros contenían numerosos resultados, como el resultado fundamental de que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, que Bernoulli consideraba nuevo, pero que se había demostrado anteriormente.

Por otra parte, Bernoulli no pudo encontrar el valor de $\sum \frac{1}{n^2}$ pero sí demostró que convergía a un límite finito menor que 2. El problema de calcular la suma de esta serie se llamó el *problema de Basilea* y estuvo abierto durante algún tiempo hasta que Euler, el mejor de los discípulos particulares de su hermano Johann, lo calculó. Su valor resultó ser $\frac{\pi^2}{6}$.

Finalmente, Bernoulli también estudió la serie exponencial que le llevó a identificar el número e en 1683. Hemos de aclarar que el número e tiene su origen en el trabajo de John Napier (1550–1617), quien desarrolló los logaritmos como una herramienta para simplificar cálculos complejos. No obstante, Bernoulli identificó el número e cuando estudió el interés continuamente compuesto (Wells, 1986), que va a ser tratado detalladamente en este artículo.

Supongamos que el banco Z ofrece un tipo de interés del 100 % anual por el dinero que coloque un ahorrador (este porcentaje es, actualmente, impensable pero va a simplificar notablemente nuestra exposición). Es evidente que, si una persona deposita x euros, al cabo de 1 año el banco Z le devolverá $2x$ euros. No obstante, en el mundo bancario, es usual fraccionar el pago de los intereses, por lo que, si suponemos que éstos se cobrarán semestralmente, el tipo de interés a aplicar sería:

$$\frac{100\%}{2} = 50\%.$$

Por tanto, al final del primer semestre, el ahorrador recibiría (vamos a expresar el tipo de interés 100 % en tanto por uno):

$$x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1,5x \text{ euros.}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que, en capitalización compuesta, los intereses se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses, tenemos que la cuantía a recibir al finalizar el año sería:

$$x \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = x \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25x \text{ euros.}$$

Podríamos repetir el razonamiento anterior dividiendo el año cada vez más en cuatrimestres, trimestres, etc., obteniendo sucesivamente las siguientes cuantías:

- $x \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37037x$ euros.
- $x \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,44141x$ euros.
- Etcétera.

En este punto, nos preguntamos qué pasaría si fuésemos capaces de dividir el año en infinitos subperíodos y hacer lo mismo con el tipo de interés. Pues bien, en este caso, obtendríamos la siguiente cuantía:

$$x \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2,71828 \dots x \text{ euros.}$$

Observemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ es el número e que, tradicionalmente, se atribuye a Euler. El razonamiento anterior podría generalizarse a cualquier tipo de interés i (en tanto por uno), obteniéndose:

$$x \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k = e^i x \text{ euros.}$$

Como conclusión, podemos afirmar que son muchos los casos en que determinadas disciplinas científicas (la física, la ingeniería, etc.) han propiciado el desarrollo de determinadas teorías matemáticas. Pues bien, en esta línea, la capitalización continuamente compuesta (o, simplemente, capitalización continua) representa una contribución de la matemática financiera para destacar la importancia del número e dentro del mundo de las matemáticas generales.

Referencias

- [1] Calinger, R. (1995): *Classics of Mathematics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [2] O'Connor, J.J. and Robertson, E.F. (1998): *Johann Bernoulli*. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. ⁷.
- [3] Wells, D. (1986): *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Penguin Press Science.

⁷Disponible en mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Jóvenes matemáticas que brillan

Premios Vicente Caselles 2024 y 2025

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Isabel María Ortiz Rodríguez
Universidad de Almería

El 10 de octubre de 2024, la *Real Sociedad Matemática Española* y la *Fundación BBVA* celebraron en Madrid la entrega de sus prestigiosos premios a investigadores en matemáticas. Entre ellos destacan los *Premios Vicente Caselles*, que reconocen a jóvenes investigadores sus aportaciones en el mundo de las matemáticas. Asimismo, el pasado 14 de octubre se entregaron los premios de 2025.

En 2024, los galardonados en la décima edición de estos premios fueron seis jóvenes brillantes [1]: María Alonso Pena, Macarena Arenas, Alberto González San, Jone López de Gamiz Zearra, Alberto Rodríguez Vázquez e Iñigo Urtiaga Erneta.

Este año lo han recibido [2]: Izar Alonso Lorenzo, Raúl Alonso Rodríguez, Rubén Medina Sabino, Juan Muñoz Echániz, Eduardo Tablate Vila y Clara Torres Latorre.

Queremos destacar aquí a las cinco investigadoras premiadas, cuyas trayectorias pueden inspirar a quienes hoy estudian matemáticas en secundaria y sueñan con dedicarse a la ciencia.



María Alonso

María Alonso Pena estudió Matemáticas y se doctoró en Estadística e Investigación Operativa en la *Universidad de Santiago de Compostela*, donde ahora es profesora.

Su trabajo combina estadística tradicional con inteligencia artificial, lo que le ha permitido analizar cómo funciona el cerebro y cómo reaccionan los animales ante amenazas. ¡Un ejemplo perfecto de cómo las matemáticas pueden ayudarnos a entender la vida!



Macarena Arenas

Macarena Arenas comenzó sus estudios en México y se doctoró en la *Universidad de Cambridge* (Reino Unido), donde ahora investiga en el campo de la Teoría de Grupos Geométricos. Esta rama de las matemáticas estudia las simetrías que vemos en la naturaleza, el arte y la ciencia. Según ella, su investigación tiene aplicaciones en física, química e incluso robótica.

¡Las matemáticas están en todas partes!



Jone López de Gamiz

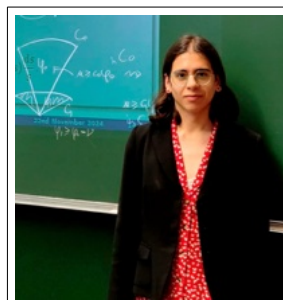
Jone López de Gamiz Zearra estudió en la *Universidad del País Vasco* y se doctoró entre esta universidad y la de Warwick (Reino Unido). Actualmente investiga en Estados Unidos, en la Universidad de Vanderbilt. Se dedica también a la teoría de grupos, y defiende que las matemáticas puras, aunque a veces parezcan abstractas, son la base de avances futuros. Por ejemplo, técnicas desarrolladas hace siglos en teoría de números hoy se usan en criptografía, para proteger nuestra información en internet.



Izar Alonso

Izar Alonso Lorenzo es profesora en la *Universidad de Rutgers* (EE. UU.). Estudió el doble grado en Matemáticas y Física en la *Universidad Complutense* de Madrid, y luego completó un máster en Matemática Pura en la *Universidad de Cambridge*. Se doctoró en la *Universidad de Oxford* en 2023 y ha investigado en centros tan prestigiosos como el *Simons Institute* de Berkeley (EE. UU.).

Su trabajo se sitúa entre la geometría diferencial y la física teórica, y se centra en el estudio de geometrías especiales en 6 o más dimensiones, relacionadas con las ecuaciones de Strominger, fundamentales en la teoría de cuerdas. ¡Una muestra de cómo las matemáticas pueden conectar con los misterios del universo!



Clara Torres

Clara Torres Latorre es investigadora en el *Instituto de Ciencias Matemáticas*. Estudió Matemáticas e Ingeniería Física en la *Universitat Politècnica de Catalunya*, y luego hizo un máster y doctorado en Matemáticas en la *Universitat de Barcelona*.

Su investigación se centra en las ecuaciones en derivadas parciales, que sirven para describir fenómenos como el calor, el sonido o el movimiento de fluidos. Sus aportaciones sobre las desigualdades de Harnack en la frontera han sido especialmente relevantes. ¡Porque las matemáticas ayudan a entender el mundo físico con precisión!

Los *Premios Vicente Caselles* reconocen el talento joven en matemáticas y muestran cómo esta disciplina puede tener un impacto real en la ciencia, la tecnología y la

sociedad. Además, nos recuerdan que las matemáticas no son solo números y fórmulas: son una forma de pensar, de resolver problemas y de descubrir el mundo.

Si te apasionan las matemáticas, ¡sigue explorando! Tal vez algún día tú también estés entre los premiados que hacen avanzar el conocimiento desde universidades de todo el mundo.

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Bienvenidos al siglo XVIII

José Antonio Mateo Delgado

IES Mariana Pineda (Granada)

Estimados señores, pese a las dificultades que vivimos, las injusticias y las hambrunas, nuestra sociedad está vi- viendo un increíble auge, impulsado por la ilustración y la revolución científica. No paran de proliferar nuevas univer- sidades y centros de investigación. Las instituciones cien- tíficas difunden conocimientos sin límite a través de sus enciclopedias, periódicos y revistas, lo que está promo- viendo que la razón y el conocimiento se conviertan en las herramientas fundamentales para el progreso humano.

Sin embargo, nuestros avances se ven siempre frenados por los insufribles cálculos que debemos afrontar, para lo que tenemos que estar siempre rodeados de miles de pe- sadas tablas. En este temido campo no conseguimos pro- greso alguno, y siempre necesitamos de buenos ayudantes que se encarguen de determinados cálculos, mientras que podrían estar ayudándonos a investigar si dispusiésemos de calculómetros precisos.

Pero hoy vengo a daros una pequeña alegría, a aporta- ros un diminuto avance que os permitirá acortar los pasos de esas insufribles raíces cuadradas. Quiero presentaros con gozo el *Método Pineda*, una mejora significativa del algoritmo tradicional de la raíz cuadrada, que tantos que- braderos da cuando profundizamos en el cálculo de deci- males, cuando buscamos la precisión oportuna que mere- cen nuestros estudios rigurosos.

Voy a centrarme en la modalidad 2 + 2, pronto en- tenderéis esta terminología. Se trata de encontrar las dos primeras cifras significativas de la raíz por el algoritmo tradicional, y obtener otras dos con una simple división, obteniendo en menos de un minuto cuatro cifras signifi- cativas bien redondeadas con una precisión asombrosa. Si se tratase de un radicando muy grande, como por ejem- plo 234 millones (nueve cifras enteras), ya sabemos por el método tradicional que el resultado tendrá cinco cifras enteras, por lo que tendremos que completar nuestro re- sultado con un cero.

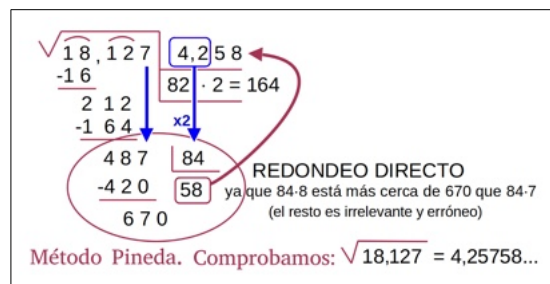
Cuando ya hemos obtenido esas dos cifras con las dos primeras parejas del radicando, pasamos a dividir, por lo que a partir de ahí pasaremos a bajar las cifras una a una. El divisor que usaremos será el doble de la raíz que ya

Referencias

[1] Fundación BBVA. Premios Vicente Caselles 2024 ⁸.

[2] Fundación BBVA. Premios Vicente Caselles 2025 ⁹.

tenemos calculada; esas dos cifras significativas y precisas que ya hemos obtenido. No necesitamos ni tener en cuen- ta el uso de decimales. Dividimos dos veces, con redondeo directo, y pasamos las dos cifras del cociente a la raíz para completar nuestro resultado. Vean un ejemplo:



Nuestro departamento ha realizado 1675 pruebas con números aleatorios, encontrando un 21 % de fallos sola- mente. La mayoría de esos fallos era por excedernos en una unidad en el redondeo, fallo ínfimo, y cuya procedencia es- tudiaresmos. En un 1 % de los casos el fallo es mayor, pero es predecible y subsanable de forma rápida, como verán a continuación. Vean por qué funciona tan bien nuestro método:

Sea $\sqrt{n} = x + y$ donde x representas las dos primeras cifras significativas de la raíz e y , las restantes:

$$\begin{aligned} (\sqrt{n})^2 &= (x + y)^2 \Rightarrow \\ n &= x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow \\ n - x^2 - y^2 &= 2xy \Rightarrow \\ \frac{n - x^2}{2x} - \frac{y^2}{2x} &= y. \end{aligned}$$

Como $\frac{y^2}{2x}$ es un valor ínfimo frente a y , tenemos que:

$$y \approx \frac{n - x^2}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{x} - x \right).$$

En nuestro ejemplo, $n - x^2 = 0,487$, $2x = 8,4$, pero el método nos permite prescindir de las comas decimales. Y fijaros qué curioso:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &= x + y \approx x + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{x} - x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{x} - x + 2x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{n}{x} \right). \end{aligned}$$

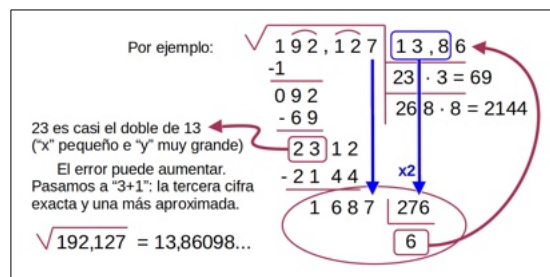
⁸ www.fbbva.es/premios/premios-investigacion-matematica-vicent-caselles-2024.

⁹ www.fbbva.es/noticias/premios-vicent-caselles-2025-investigacion-matematica.

¡Curiosa y bella coincidencia con la fórmula del método de Herón!

En la simpleza radica la belleza de esta demostración, que culmina con una fórmula exactamente igual a la del insufrible método de Herón. ¿Será obra de los dioses esta coincidencia? El método de Herón fue muy útil en su época, pero era recurrente y tedioso, y nunca llegabas a saber qué nivel de precisión alcanzabas. Os recuerdo que cada término se obtenía haciendo la media entre la aproximación anterior y el cociente del radicando con dicha aproximación: $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{n}{x_n} \right)$.

Como verán, hemos dado por hecho que $\frac{y^2}{2x}$ es despreciable frente a y , pero ¿qué pasa si x tiene dos cifras muy bajas e y empieza por cifras muy altas, como por ejemplo en 1,098? Pues que ya no es tan despreciable el error que podemos cometer. ¿Y no es verdad que tal circunstancia puede ser advertida mientras resolvemos nuestra raíz? Pues si nos encontramos esta circunstancia, si nuestras dos primeras cifras eran bajas y llegamos a un resto alto, que casi duplica lo que llevamos de raíz, convertimos nuestro método de $2+2$ en un $3+1$ sobre la marcha, con la ventaja de que la raíz tiene cifras bajas y facilita el uso del método tradicional:



Podemos obtener más de cuatro cifras si lo necesitamos. El *Método Pineda* admite infinitas variantes ($3+2, 3+3, 2+1 \dots$) dependiendo de la precisión que busquemos. Lo que no debemos hacer nunca es obtener más cifras por la división de las que hayamos calculado previamente mediante el método tradicional.

Esperamos que nuestro método os permita expresar más tiempo para vuestras investigaciones. Sin duda, a este paso, en menos de tres siglos estaremos muy cerca de constituir una sociedad perfecta, donde lo racional se imponga, para que nunca más volvamos a ser víctimas de guerras y hambrunas. Un atento saludo, compañeros.

Agradezco a Carlos Ivorra, del Foro del Rincón Matemático, su colaboración en la deducción de la bella relación con el método de Herón. ■

Microrrelatos matemáticos

Cubos al cubo

María Pilar Cano

Psicopedagoga y escritora

Tarzán H., el profe de mates, aceptaba los diferentes ritmos de aprendizaje.

—No se puede juzgar a un pez por su capacidad de trepar a los árboles —decía diariamente.

—¿Qué es un cubo? —esperando una respuesta, supo que todo iba a ser diferente a lo programado.

—Es parecido a un tetrabrik —habla alzando la mano.

—Es lo que hay en mi casa para fregar el suelo —ríendose.

—La noria de agua de mi pueblo tiene cubos —continuando con las risas.

—El cubo de Rubik —sacándolo de la mochila.

—Y, el cubo de espejos —recordando el de su primo.

—También están los cubos de las ruedas —el que quería ser mecánico.

—El cubo de 2 es 8 —acordándose de las potencias.

—Un cubo que mide 1 decímetro es 1 litro —seguía sin entenderlo.

—Es un cuerpo geométrico formado por 6 cuadrados iguales —consultando el libro.

—Los cubos para lavar la ropa son redondos —de dónde venían los cuadrados...

Aquel día, nadando entre lagunas, los animales de la selva se habían transformado en peces.

En la reunión de departamento, sus compañeros —Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro—, le dijeron que el alumnado se había quedado ciego. Él era Hexaedro.

Pasatiempo

José Ramón Sánchez García

IES Los Ángeles (Almería)

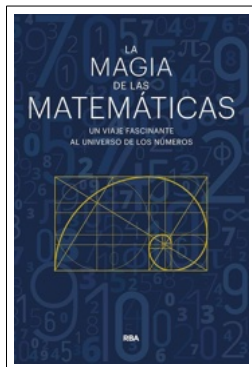
Desde pequeño le había llamado mucho la atención la medida del tiempo. Mal que bien, con el Sistema Métrico Decimal el ser humano había sabido capturar las distintas magnitudes: longitud, volumen, masa... (por eso él podía decir que vivía en un habitáculo de $4 \times 3 \times 2,5$ metros, y que todos los días ingería 7 vasos de 250 ml de agua y 1,5 kg de comida). Pero el tiempo era otra cosa. La duración de las cosas sujetas a mudanza se había convertido en un problema desde las primeras civilizaciones, y después de encajar calendarios solares, lunares y papales, se acordaron los 365 días, 12 meses, 24 horas, 60 minutos y 60 segundos, que son de todo menos decimales. El tiempo, efectivamente, se escapó de la racionalidad de la Academia Francesa.

Por eso él quería atraparlo, y para ello se alió con las operaciones matemáticas: desde que entró habían pasado 8792 días, es decir, 211 008 horas, 759 628 800 segundos. Esta obsesión quimérica de asir lo inasible tenía una explicación: en su celda del corredor de la muerte, la angustia era no saber cuándo el tiempo se le terminaría escapando.

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

La magia de las matemáticas. Un viaje fascinante al universo de los números

Enrique Gracián, Joaquín Navarro y Fernando Corbalán



Ficha Técnica

Editorial: RBA.

560 páginas.

ISBN: 978-84-1132-606-3.

Año: 2024.

Este libro toca temas que han interesado a los matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días: la proporción áurea, los números primos, el número π y el infinito. Aunque tenga más de 500 páginas, es de lectura ágil y amena, en parte porque todos los temas son tratados de manera accesible incluso para aquellos que no tengan formación matemática, en parte por la incorporación de numerosos gráficos, imágenes y notas históricas que ayudan a entender y contextualizar los conceptos matemáticos considerados.

El primer capítulo está dedicado a la proporción áurea, número que ha recibido diversos nombres a lo largo de la historia, número de oro, número divino, divina proporción y proporción trascendental, entre otros. Se tiene constancia de su presencia desde hace miles de años en distintas civilizaciones no necesariamente cercanas entre sí. Aparece en la arquitectura, el arte, la biología, los fractales... Hoy en día podemos observar su presencia por ejemplo en el diseño de las tarjetas bancarias.

El segundo capítulo se centra en los números primos. Dado que todo número natural se puede descomponer de

forma única como producto de números primos, es fácil entender el interés de muchos matemáticos en estos números. Aunque inicialmente los números primos sólo tuvieron un interés teórico, esto cambió de manera inesperada a finales del siglo XX gracias a su uso en la criptografía, la cual es necesaria para interactuar en internet de manera segura.

El número que se considera en el siguiente capítulo es π . Posiblemente sea el número no natural más conocido entre aquellos que no se dedican a las matemáticas. Aunque este número tiene un origen geométrico, aparece en otras disciplinas matemáticas, como la teoría de probabilidades. El número π y la proporción áurea comparten su condición de números irracionales, es decir, ninguno de ellos son números exactos o periódicos. Como curiosidad se incluye en una sección de este capítulo las 100 000 primeras cifras de π .

El último capítulo de este libro se dedica a unos de los conceptos más enigmáticos de las matemáticas, el infinito. Aunque la idea de infinito parezca una abstracción que sólo puede interesar a filósofos y matemáticos teóricos, la verdad es que parte del cálculo infinitesimal y de sus aplicaciones se basan en esta idea. El libro finaliza con la trágica biografía de Georg Cantor, creador de la moderna teoría de conjuntos y el primero en formalizar la idea de infinito. Lamentablemente, sus ideas rompedoras sobre el infinito encontraron el rechazo frontal de algunos de los matemáticos más influyentes de su época.

En conjunto este libro constituye un viaje apasionante por las matemáticas con el pretexto de estudiar en profundidad varios conceptos muy importantes y con gran presencia a lo largo de la historia.

Antonio Morales Campoy
Universidad de Almería

Acertijos

Las manecillas del reloj

Con paciencia, la adivinanza que planteamos podría resolverse en 12 horas de observación. Sin embargo, es más interesante una respuesta razonada que nos libere de un desafío tan monótono.

¿Cuántas veces se cruzan las agujas horaria y minuterá desde las 10:00 de la mañana hasta las 10:00 de la noche?
(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

El problema que había propuesto doña Lola consistía en la determinación de los pesos de tres objetos sabiendo que:

- El primer objeto tenía un peso inferior en un gramo a la suma de los pesos de los dos restantes.
- Debíamos añadir 33 a la diferencia de los cuadrados de los pesos de los objetos segundo y tercero para alcanzar el cuadrado del peso del primer objeto.
- El producto de los pesos de los tres objetos ascendía a 105.

Sean a , b y c los pesos en gramos del primer, segundo y tercer objeto, respectivamente. Los datos ya expuestos

nos dicen que

$$\begin{aligned} a &= b + c - 1, & (1) \\ a^2 &= b^2 - c^2 + 33, & (2) \\ abc &= 105. & (3) \end{aligned}$$

La identidad (1) permite deducir que $(a - c)^2 = (b - 1)^2$, de donde,

$$a^2 + c^2 = b^2 + 1 - 2b + 2ac.$$

Por otra parte, de acuerdo con (2), $a^2 + c^2 = b^2 + 33$. En consecuencia,

$$b^2 + 1 - 2b + 2ac = b^2 + 33,$$

y podemos afirmar que $2ac - 2b = 32$, es decir, $ac - b = 16$. Teniendo en cuenta (3),

$$\frac{105}{b} - b = 16.$$

Llegamos así a la ecuación $b^2 + 16b - 105 = 0$, cuyas soluciones son 5 y -21.

Puesto que b representa el peso del segundo objeto, nos quedamos con la primera de ellas. Para tal valor de b la ecuación (1) se escribe en la forma $a = 4 + c$. Sustituyendo b por 5 y a por $4 + c$ en la identidad (2), obtenemos la ecuación $c^2 + 4c - 21 = 0$. Sus soluciones son 3 y -7. Como antes, nos quedamos con la positiva.

Haciendo $b = 5$ y $c = 3$ en la ecuación (1), deducimos que $a = 7$. Puede observarse que, en efecto, si ponemos

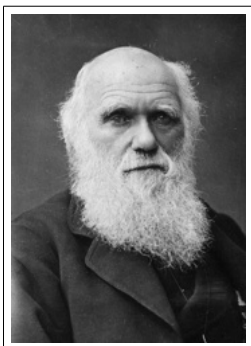
$$a = 7, \quad b = 5, \quad c = 3,$$

se cumplen todas las condiciones exigidas. Estos valores son, como se ha puesto de manifiesto, la única solución del acertijo.

Juan Carlos Navarro Pascual
Universidad de Almería

Citas Matemáticas

«Un matemático es un hombre ciego en una habitación oscura buscando un gato negro que no está ahí».



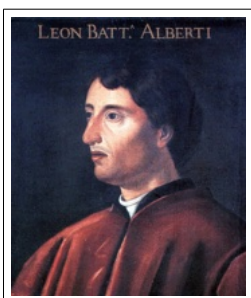
Charles Darwin (1809–1882),
naturalista inglés.

«El conocimiento científico tiene propiedades fractales, de modo que, por mucho que aprendamos, lo que queda, por pequeño que parezca, es tan infinitamente complejo como lo era el todo al principio.».



Isaac Asimov (1920–1992),
escritor estadounidense.

«Desearía que el pintor fuera lo más culto posible en las artes liberales, pero ante todo desearía que supiera geometría».



Leon Battista Alberti (1404–1472),
polímata italiano

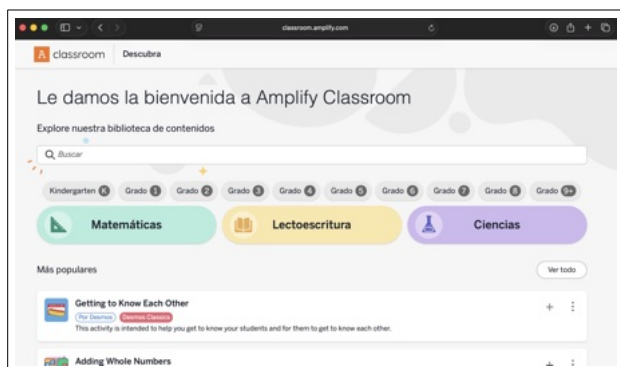
«El número es la máxima expresión abstracta de todas las formas de arte».



Vasili Kandinski (1866–1944),
pintor ruso.

Páginas web y redes sociales

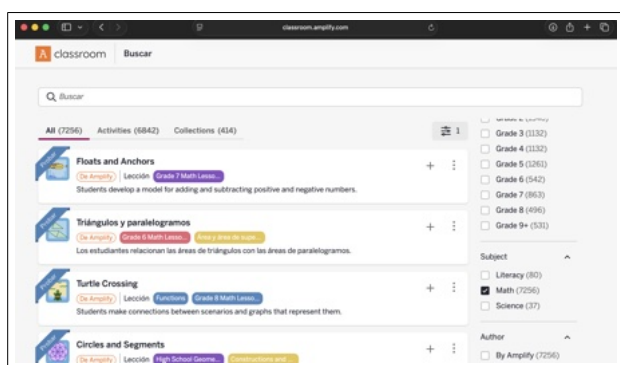
Amplify Classroom



Página principal de Amplify Classroom

Amplify Classroom (classroom.amplify.com), según se describe en su sitio web oficial, es una plataforma educativa que ofrece de manera gratuita lecciones interactivas preconfiguradas, así como una herramienta de creación y publicación de contenidos. Esta herramienta está dirigida a educadores, registrados sin coste alguno, quienes pueden utilizarla tanto para diseñar sus propias actividades como para adaptar o personalizar las ya existentes. La plataforma permite establecer conexiones entre diferentes representaciones, ajustar los contenidos a las necesidades del aula y proporcionar retroalimentación dinámica e interpretativa al alumnado.

Los materiales disponibles en *Amplify Classroom* pueden filtrarse por nivel educativo o por materia, lo que facilita la búsqueda de recursos específicos. En el ámbito de las Matemáticas, la plataforma alberga más de 7000 lecciones, todas ellas accesibles de forma gratuita para fines personales, educativos y no comerciales.



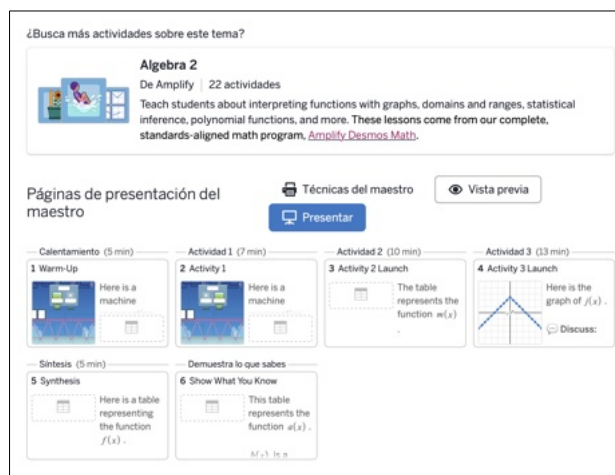
Cada lección incluye una breve descripción de los materiales necesarios —como presentaciones, papel y lápiz—, un resumen de los objetivos de aprendizaje y el desarrollo detallado de la actividad. En algunos casos, se incorporan también recursos imprimibles y propuestas de evaluación.

Además, la plataforma sugiere una amplia variedad de actividades relacionadas que pueden resultar de interés para el profesorado y servir como complemento o extensión del aprendizaje.



Herramienta de creación de contenidos

Por otra parte, la herramienta de creación de contenidos de *Amplify Classroom* destaca por su diseño intuitivo y por la posibilidad de integrar múltiples recursos interactivos en las actividades. Entre las opciones disponibles se encuentran una calculadora gráfica, herramientas geométricas, un polígrafo, la inserción de videos, funciones de dibujo y diversos tipos de respuestas interactivas. Estas funcionalidades amplían las oportunidades de participación del alumnado y enriquecen la experiencia de enseñanza-aprendizaje en entornos digitales.



Ejemplo de una actividad

En suma, *Amplify Classroom* se presenta como un recurso educativo de especial interés para la comunidad docente, al poner a su disposición materiales accesibles y versátiles.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Una jarra de cerveza y ocho tazas de té

Iván José Acién Martín

Juan Francisco Cuevas Rodríguez

Rocío Guillén Manzano

Juan Rafael Sánchez Gálvez

Carmen Torres Gutiérrez

Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Conforme la matemática ha ido desarrollándose y sobre todo, en los últimos siglos, han surgido corrientes del pensamiento acerca de la naturaleza de la misma: ¿individualismo ontológico o estructuralismo?, ¿invención o descubrimiento? Incluso, ¿el cero es natural? Sin embargo, la cuestión más afamada es ¿fundacionalismo o pragmatismo? En otras palabras, ¿la matemática debe reducirse a una construcción consistente de axiomas o solo importa su aplicación última para el ser humano? Aunque en el medio está la virtud, suelen proclamarse alabanzas hacia aquellos célebres matemáticos que, a raíz de ingenio, han levantado cimientos de hormigón sobre los que seguir creando nuestra base teórica. En contraposición, las epopeyas de la estadística se han visto reducidas a anécdotas con un bebecio y ocho infusiones herbales.

La Irlanda de inicios del siglo XX ha visto al cervecero, William Sealy Gosset, conocido por todos como Student, quien, trabajando en las cerveceras Guinness, se vio obligado a ocultar su identidad tras publicar bajo pseudónimo debido a restricciones corporativas. Fue en ese entorno, entre jarras de cerveza y laboratorios de control de calidad, donde Student desarrolló la famosa t de Student, una herramienta que permitió inferir conclusiones fiables incluso con muestras pequeñas. Sin entrar en detalles, la importancia del trabajo de Student fue tal que el propio Fisher pensó que estaban ante una revolución de la lógica. Aún así, Gosset pensó que Fisher, ya una eminencia de la estadística en ese momento, sería el único que le podría sacar provecho a esta idea.

Apenas unos años más tarde Muriel Bristol adoptaría la figura de la catadora de té en lo que se convirtió en una de las historias más contadas en el mundo de la estadística. Una buena tarde de primavera, Muriel estaba compartiendo la sagrada hora del té con su compañero biólogo Ronald Fisher, cuando éste le ofrece una taza y ella la rechaza, ya que no le gusta el sabor de la bebida si se ha vertido antes el té que la leche. Su amigo cree que está bromeando, pero ella está convencida de su capacidad para diferenciar cuando se ha vertido antes el té que la leche, y viceversa, únicamente catando el té.

Si bien la habilidad de esta mujer era, como poco, fascinante en una cultura tan importante como la inglesa, Fisher se preguntó qué maneras tenía de poder estudiar esta afirmación. Para ello, preparó ocho tazas de té con leche. En cuatro de ellas vertió primero el lácteo y en las otras cuatro cayó primero la infusión. Tras reordenar las tazas aleatoriamente, la catadora fue capaz de distinguir

las ocho tazas correctamente. Fisher se preguntó si, asumiendo que ella no tuviera la capacidad para distinguirlas, ¿qué probabilidad habría realmente de que hubiera acertado al azar?

Aquí introdujo Fisher la idea de la hipótesis nula (H_0), es decir, que la dama únicamente puede acertar aleatoriamente, pura suerte. Posteriormente, los estadísticos Jerzy Neyman y Egon Pearson incluirían en su teoría una hipótesis alternativa (H_1), que aplicadas a este caso sería:

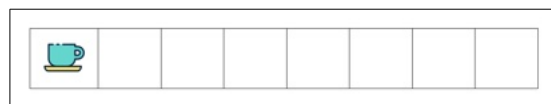
H_0 : La dama no es capaz de diferenciar las tazas de té

H_1 : La dama sí que puede diferenciar las tazas de té

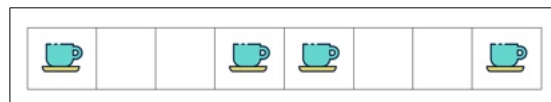
Debemos diferenciar este enfoque del que originalmente tenía Fisher sobre este problema. Neyman y Pearson considerarían la posibilidad de rechazar H_0 en favor de H_1 asumiendo un riesgo controlado. En cambio, Fisher no consideraba ninguna hipótesis alternativa formal; simplemente evalúa cómo de significativo debe ser el resultado para tener que rechazar H_0 . Entonces, ¿cómo de pequeña es la probabilidad de que acierte con todas las tazas?

Uno de cada setenta

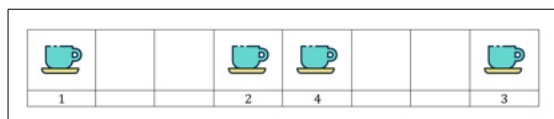
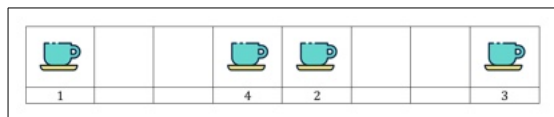
Las 8 tazas de café, siendo 4 de un tipo y 4 del otro, se pueden ordenar de muchas formas. Comenzamos colocando la primera taza de té (servida con la leche antes que el té, como le gusta a Muriel) en cualquiera de las 8 posiciones disponibles. Y si queremos colocar una segunda taza disponemos de 7 posiciones, por lo que las posibles combinaciones son $8 \cdot 7 = 56$.



Podemos seguir añadiendo tazas en la posición que queramos hasta llegar a las 4 de este tipo.



El número de formas de colocar 4 tazas de té en 8 posiciones es de $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$. Pero debemos tener en cuenta que estas 4 tazas se podrían haber colocado en sus mismas posiciones, pero en distinto orden, y cada camino llevaría a lo mismo:



Vuelve a ser un problema como el inicial. Podemos elegir entre 4 posiciones. Tras colocar la primera taza tendremos 3, luego 2, ... En total hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas distintas de colocar estas mismas tazas. Efectivamente, estamos hablando del factorial de un número:

$$n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^n k \quad \text{para } n > 0,$$

$$0! = 1.$$

Con estas herramientas podemos responder a la siguiente pregunta: ¿Cuántas formas distintas hay de colocar 4 tazas de té en 8 posiciones diferentes? Sabemos que hay 1680 formas de colocar las 4 tazas teniendo en cuenta el orden en el que son colocadas. Por otra parte, cada configuración admite 24 caminos distintos (pues equivale a $4!$). Por tanto, el número de formas de colocar 4 tazas de té en 8 casillas distintas (obviando el orden) es de $\frac{1680}{24} = 70$.

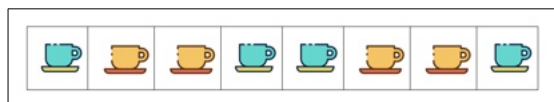
Se trata, evidentemente, de un número combinatorio, es decir: La cantidad de maneras de extraer un subconjunto con k elementos, de otro conjunto con n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{para } n \geq k \geq 0.$$

Como nosotros hemos calculado:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1680}{24} = 70.$$

El resto de posiciones, cómo no, serían para las tazas con té mal servido según Muriel, con la leche vertida sobre la infusión.



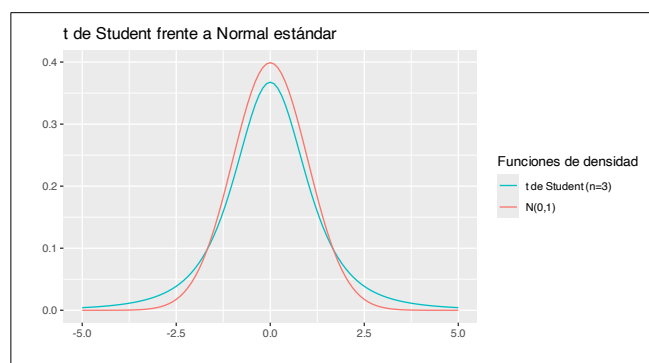
¿Suerte o significancia?

Todo se remonta a Gosset, quien, oculto tras un seudónimo (para no poner en riesgo el poder monopolístico de la cervecera Guinness, para la que trabajaba) y algunas jarras de cerveza, dio con una nueva distribución que sería muy útil para el trabajo de Fisher.

Trabajando en el control de calidad de la fábrica, se dio cuenta de que la distribución normal sólo era precisa con muestras grandes. Con grandes observaciones, las irregularidades del azar se compensan y todo tiende a seguir la

campana de Gauss, la famosísima curva normal. Sin embargo, él necesitaba una manera de analizar unas pocas jarras de cerveza y, al reducir el tamaño de la muestra, la incertidumbre aumentaba: al estimar la media a partir de pocas observaciones, no solo se desconoce el valor verdadero, sino que además hay que estimar cuánto varía.

Tras pensarlo por un rato, probó ajustando el exceso de incertidumbre usando un parámetro llamado grados de libertad ($n-1$), ya que cuando usamos la media para calcular la desviación, no todos los datos son libres sino que uno queda determinado por los demás. Por este doble margen de error, la curva se ensancha y las colas se vuelven más gruesas, se «achata». Esto se resume en que esta distribución es más propensa a valores extremos.



Comparación entre la función de densidad de una normal estándar y una t de Student con 3 grados de libertad

Student nos dejó una herramienta para decidir si lo observado es una señal real o solo ruido del azar cuando tienes pocos datos. Veamos un ejemplo:

Supongamos que trabajamos en esta cervecería y queremos comprobar que la cerveza que vendemos tiene 5 grados de alcohol. Para descubrirlo, tomamos unas pocas muestras, unas $n = 10$, (porque si nos llevamos todos los barriles del local nuestro jefe se enfadaría), calculamos la media tal cual conocemos y obtenemos un resultado de 5,2°. ¿Cómo sabemos que esto es una variación natural y no un cambio de receta? Gracias a la t de Student podemos obtener cuán improbable es obtener nuestro resultado si la media fuera realmente 5. Si el resultado es demasiado extremo, tenemos razones para sospechar que algo ha cambiado, si no, asumimos que todo sigue igual. Revisemos los datos que llevamos hasta ahora:

Llamamos media poblacional a la que queremos comprobar $\mu_0 = 5$ y media muestral a la calculada $\bar{x} = 5,2$. Además, tenemos que el tamaño de nuestra muestra es $n = 10$. Supongamos que en nuestros cálculos iniciales hemos obtenido la desviación muestral y hemos obtenido un valor de $s = 8$. Gracias a Student, podemos calcular el llamado estadístico t , lo que nos dice si la diferencia entre las dos medias es significativa o solo azar y que se corresponde con la fórmula:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$t = \frac{5,2 - 5}{8/\sqrt{10}} \approx 0,079.$$

Los grados de libertad son $n - 1 = 10 - 1 = 9$.

Con la tabla de t Student y usando estos dos datos para mirar filas y columnas, vemos que estos se corresponde con un p -valor que nos dice la probabilidad de obtener un resultado igual o más extremo de 0,2, suponiendo que la graduación de la cerveza fuera realmente 5° .

En nuestro caso, el p -valor sale 0,94 aproximadamente, por lo que la probabilidad es 94 %. Esto nos quiere decir que es muy muy probable que la cerveza tenga 5° y que hemos obtenido 5,2 al principio por motivos del azar.

Aunque aún no lo sabíamos, cuando hemos hablado de «suponer que la cerveza tenía 5° y que la variación obtenida era simple azar» y el p -valor, estábamos aplicando un sistema lógico que fue propuesto por Fisher y que resultó crucial a la hora de desvelar la incógnita de las tazas de té; pero, ¿en qué consiste?

Para comprobar si el talento de Muriel Bristol era realmente talento o suerte, usando como base algunos resultados de Student, este segundo matemático elaboró un test de hipótesis que sería revolucionario para la época. Veamos cómo funciona con el caso de la catadora de té:

- Empezó suponiendo que la catadora no podía diferenciar los té y que todo era cuestión de suerte. Esta afirmación será llamada hipótesis nula (H_0) y comenzará creyéndose que es cierta. Entonces, ¿qué tan probable es que acierte con las 8 tazas aleatoriamente? Esta probabilidad recibirá el nombre de p -valor y de él ya hemos hablado antes.
 - Usamos una distribución para calcular esta probabilidad. Aquí es donde entra en juego la t de Student y su campana achatada. Sin embargo, en este caso podemos plantearlo con combinatoria. ¡Hagámoslo!
1. Tomamos 8 tazas de té, 4 vertiendo la leche primero (L) y 4 con el té (T). La catadora marca cuál taza es de cada tipo (sin haber visto el proceso de preparación de las tazas) y acierta las 8 veces.

2. Calculamos la probabilidad de que lo haya hecho por puro azar: que marque 4 tazas como L y sean verdaderamente las que fueron preparadas vertiendo la leche primero.
3. Sabemos que hay $\binom{8}{4} = 70$ formas de elegir 4 tazas entre 8 posibles. La probabilidad de que acierte esas 4 tazas la podemos obtener con la fórmula:

$$P(k \text{ aciertos}) = \frac{\binom{4}{k} \binom{4}{4-k}}{70},$$

por lo que

$$P(0 \text{ aciertos}) = \frac{\binom{4}{0} \binom{4}{4}}{70} = \frac{1}{70} \approx 0,0143$$

- Tras los cálculos vemos que el p -valor es muy pequeño, ya que es 0,0143, por lo que podríamos interpretarlo como que la posibilidad de acertar las 8 tazas siendo todo esto solo cuestión de suerte es muy improbable.

Así, nuestra hipótesis inicial no es válida y deberíamos rechazarla. En esta posición, no nos queda más remedio que admitir que la catadora tenía razón y tiene un verdadero talento innato para diferenciar el orden de estas dos bebidas. Está última afirmación es la llamada hipótesis alternativa (H_1).

Referencias

- [1] Fisher, R. A. (1935). Mathematics of a lady tasting tea. En J. R. Newman (Ed.), *The World of Mathematics* (Vol. III, pp. 1514–1521). Simon & Schuster.
- [2] Britannica (2019). Student's t-test | Statistics. In *Encyclopædia Britannica* ¹⁰.
- [3] Ziliak, S. T. (2008). *Retrospectives: Guinnessometrics: The economic foundation of "Student's" t*. *Journal of Economic Perspectives*, 22(4), 199–216 ¹¹.

¹⁰ www.britannica.com/science/Students-t-test.

¹¹ doi.org/10.1257/jep.22.4.199.

Responsables de las secciones

♦ ACTIVIDAD MATEMÁTICA

- *Actividades organizadas*: Helena Martínez Puertas (hmartinez@ual.es) y Sergio Martínez Puertas (spuertas@ual.es).
- *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Cristina Rodríguez Perales (crp170@ual.es).

♦ ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

- *Experiencias docentes*: Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez (climent@ddcc.uhu.es) e Isabel María Romero Albadalejo (imromero@ual.es).

♦ ENSEÑANZA SECUNDARIA

- *Experiencias docentes*: José Manuel Bonillo Viciano (josebonillomat@gmail.com), David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Pilar Gámez Gámez (mpgamez75@gmail.com) y María del Mar Llobregat Requena (mmar.llobregat@sek.es).
- *Enseñanza bilingüe*: Daniel Prados Torrecillas (plurilinguismo.dp.al.ced@juntadeandalucia.es).
- *Concurso de problemas*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnave@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).

♦ DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- *La historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorrecci@ual.es).

- *Las matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Antonio García Jerez (agarcia-jerez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jllopez@ual.es) y Ana Devaki Maldonado González (amg457@ual.es).

- *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).

- *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).

- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).

- *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).

- *Citas matemáticas*: Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).

- *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgroz@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).

- *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnave@ual.es).

- ♦ TERRITORIO ESTUDIANTE: Iván José Acien Martín (ivanacien.tecno18@gmail.com), Juan Francisco Cuevas Rodríguez (juanfco04cr@gmail.com), Rocío Guillén Manzano (rocioguillenmanzano@gmail.com), Juan Rafael Sánchez Gálvez (jrsangal@gmail.com) y Carmen Torres Gutiérrez (arusuke73.kun@gmail.com).

Aviso legal

Las opiniones expresadas en esta revista son las de los autores, y no representan necesariamente las del equipo editorial del *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*.

Los derechos de copyright de los artículos publicados pertenecen al *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*. Cualquier persona física o jurídica que desee utilizar una parte o la totalidad de algún artículo, podrá hacerlo citando la fuente de referencia y su autor o autores.