Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XIX. Número 3 — 29 de abril de 2026

Sergio Belmonte en la UAL

Curvas mágicas

Inicialmente podríamos pensar que las palabras magia y matemáticas no cuadran excesivamente en la misma frase. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. ¡Cuántas veces les hemos repetido a nuestros estudiantes que las matemáticas están por todos los lados a nuestro alrededor! En la magia también es posible encontrar matemáticas.

Es cierto que en muchas situaciones esas matemáticas no son fácilmente detectables y ahí es donde la magia aparece.

En este artículo, el divulgador Sergio Belmonte nos muestra un «truco» curioso, basado en conceptos matemáticos muy bellos y profundos, que nos permitirá ponerlo en prática y sorprender a las personas asistentes a la reunión.

(Ver artículo en la página 24)

Matemáticas en tiempos de los faraones


Papiro de Rhind

La historia de las matemáticas ha tenido tradicionalmente un enfoque eurocéntrico, estudiando profusamente el desarrollo de nuestra ciencia en el ámbito occidental.

Sin embargo, hubo desarrollos matemáticos muy interesantes más allá de los griegos. Sin ir más lejos, en el antiguo egipto se desarrollaron metodologías matemáticas de las que bebieron personajes tan célebres como Euclides o Arquimedes. Cierto es que nos ha llegado menos documentación al respecto, pero hay conceptos muy interesantes dignos de estudiar.

Este es el caso de las denominadas *fracciones egipcias*, que los escribas utilizaban a la hora de realizar repartos justos.

(Ver artículo en la página 20)

Editorial: Ética en la investigación

En este editorial no tratamos habitualmente temas de investigación al ser el Boletín una revista de divulgación. Sin embargo, en esta ocasión queremos hablar de ética, y en concreto de ética en la investigación.

La ética no atraviesa su mejor momento en muchos ámbitos, y la investigación científica no es una excepción, aunque es una necesidad. La presión por publicar y lograr impacto puede llevar a prácticas cuestionables que van desde la manipulación de datos hasta la apropiación de ideas. Esto no es solo hacer trampa, sino romper la confianza en el método científico y en la ciencia en general, con consecuencias que alcanzan a toda la sociedad y favorecen la desinformación.

Investigar no consiste únicamente en producir resultados, sino en hacerlo de manera responsable y honesta.

Esta reflexión no debe limitarse únicamente a la investigación, sino extenderse a todo el ámbito académico. Porque valorar y cuidar la ética es la única forma de preservar la credibilidad del conocimiento y de reforzar una convivencia basada en la responsabilidad, el pensamiento crítico y la honestidad.

Resumen

Actividades matemáticas p. 2

Enseñanza primaria p. 7

Enseñanza secundaria p. 9

Concurso de problemas p. 12

Divulgación matemática p. 14

Territorio estudiante p. 26

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Entrega del premio del Boletín

El premiado con su profesor

El pasado 23 de abril se hizo entrega del premio del Concurso de problemas del Boletín a Juan Francisco Mateu Contreras en el *Centro Educativo Agave* de Huércal de Almería. Al acto acudieron todos sus compañeros de primero de Bachillerato.

Aprovechando que este año se celebra el centenario del fallecimiento del arquitecto catalán Antoni Gaudí, Fernando Reche impartió la conferencia titulada *La geometría en la obra de Gaudí.*

Día Internacional de las Matemáticas

Con motivo del *Día Internacional de las Matemáticas*, la *Facultad de Ciencias Experimentales* celebró una jornada en la que participaron 250 estudiantes de Secundaria y Bachillerato procedentes de 7 institutos de la provincia de Almería.

Un momento de la actividad

El evento comenzó en el auditorio de la UAL con la conferencia interactiva *Las matemáticas en la magia y viceversa*, impartida por Sergio Belmonte Palmero, vicepresidente del Museo de Matemáticas de Cataluña, quien logró cautivar al público combinando conceptos matemáticos con sorprendentes trucos de magia.

Posteriormente, los estudiantes participaron en la actividad *Los decimales de* π, en la que, por tercer año, se desplegó una extensa pancarta en el pasillo central de la Universidad con las 600 primeras cifras decimales de este emblemático número.

Los decimales de π

El *Día Internacional de las Matemáticas* se celebra cada 14 de marzo y fue proclamado por la *Conferencia General de la UNESCO*. Desde entonces, la *Universidad de Almería* se ha sumado a esta conmemoración con actividades vinculadas al número π [1].

Viernes científicos 120 y 121

La *Facultad de Ciencias Experimentales* ha comenzado el segundo cuatrimestre con la organización de dos nuevas ediciones de *Los Viernes Científicos* dedicados a las matemáticas y a la física. La edición 120 se celebró el 20 de febrero, teniendo como ponente invitado a Antonio J. Durán, miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla* (IMUS), quien impartió la conferencia titulada *La función zeta de Riemann y la distribución de los números primos.*

Antonio J. Durán con el decano de la Facultad de Ciencias Experimentales, Juan José Moreno Balcázar, en la presentación de la conferencia

En la charla, Durán realizó un recorrido histórico por la célebre Hipótesis de Riemann, planteada hace 200 años, y abordó los avances más recientes relacionados con dicha hipótesis, dejando claro que, aun sin resolverse, continúa siendo una fuente de inspiración tanto científica como artística.

Por su parte, Renato Álvarez Nodarse, catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la *Universidad de Sevilla*, fue el encargado de impartir la edición 121, celebrada el 20 de marzo.

[1] La jornada puede verse en el canal de YouTube de la Facultad: *www.youtube.com/watch?v=P40SWT6lwmA*.

ISSN 1988-5318

Renato Álvarez momentos antes de comenzar su conferencia

Con la conferencia titulada 100 *años de la mecánica cuántica: la teoría más desconcertante y revolucionaria que haya existido jamás*, presentó una visión histórica de los grandes retos de la física, remontándose hasta abril de 1990, y realizó una mirada al momento presente, destacando cómo la teoría cuántica impulsa y sustenta gran parte de la tecnología que utilizamos actualmente en nuestra vida cotidiana.

Ambas conferencias están disponibles en el canal de *YouTube* de la Facultad:

- Conferencia 120:
  www.youtube.com/watch?v=_TO9M1XcQZk.
- Conferencia 121:
  www.youtube.com/watch?v=dWQcXsFzpiw.

Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia

Como cada año, el 11 de febrero se celebró el *Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia*. Para conmemorar esta fecha, el *Vicerrectorado de Igualdad, Inclusión y Compromiso Social* de la UAL organizó una nueva edición de la actividad *Una científica visita tu centro*, en la que participaron 126 investigadoras que visitaron cerca de 100 centros educativos de toda la provincia.

Esta iniciativa se enmarca en el programa *Innovadoras del Futuro: Seminarios de Ciencia, Tecnología, Género y Vocación*, financiado por el *Instituto de las Mujeres* del *Ministerio de Igualdad*, y se ha consolidado durante diez años como una red clave entre la universidad y los centros de secundaria para acercar la ciencia y la tecnología a las jóvenes, destacando el papel de las mujeres en las áreas STEAM, para fomentar vocaciones científicas.

En el ámbito de las matemáticas participaron Ana Belén Castaño Fernández, quien visitó los centros de Vera *IES El Palmeral* y *IES Alyanub*, Isabel Mª Romero Albaladejo y Mª del Mar García López, quienes de manera conjunta visitaron el *IES Río Aguas* de Sorbas y el *IES Murgi* de El Ejido. Estas investigadoras compartieron sus experiencias, explicaron en qué consiste su trabajo y animaron a las estudiantes a interesarse por la ciencia y la investigación.

Investigadoras de la Facultad de Ciencias Experimentales

Siguiendo la tradición de años anteriores, la *Facultad de Ciencias Experimentales* celebró esta efeméride mediante la realización de una foto conjunta de todas las docentes e investigadoras de la Facultad, como símbolo de la fuerza, el talento y el compromiso de las mujeres en el ámbito científico.

VI Feria Aula Almería

Cartel anunciador

Durante los días 21 y 22 de abril, el campus de la *Universidad de Almería* ha acogido la *VI Feria Aula Almería «Construye tu futuro»*, un espacio dirigido a ayudar a los jóvenes de nuestra provincia a elegir sus estudios y profesión mediante una visión actualizada de titulaciones universitarias y ciclos formativos. Además, el IPEP presentó la oferta formativa de Enseñanza para Adultos.

Organizada por la *Universidad de Almería*, en colaboración con la Junta de Andalucía, Diputación de Almería, Ayuntamiento de Almería y Cajamar, la feria contó con 32 stands, además de talleres y charlas divulgativas de las distintas ramas de conocimiento, congregando a cerca de 4000 estudiantes de secundaria procedentes de 70 centros de la provincia.

La *Facultad de Ciencias Experimentales* presentó las titulaciones que se imparten en el centro mediante la conferencia *Tú eres Ciencia*, acción que se complementó con las actividades de carácter lúdico–divulgativo realizadas por su asociación estudiantil DELTA, que brindaron a los asistentes la oportunidad de descubrir el mundo de la ciencia.

Encuentro en Huelva de la primera promoción del Grado Interuniversitario en Física

El 26 de febrero, la *Universidad de Huelva* recibió oficialmente a los estudiantes de la primera promoción del Grado en Física de la *Universidad de Almería*, una titulación pionera que se imparte de forma conjunta en las dos universidades. Los estudiantes compartirán su formación entre las universidades a lo largo de sus estudios, siendo la movilidad obligatoria en los cursos de segundo y tercero.

Foto de familia

El Grado Interuniversitario en Física ha sido diseñado para preparar a los futuros físicos en áreas críticas como las energías renovables, la física de materiales y la computación avanzada. Su puesta en marcha conjunta viene a cubrir la demanda en ambas ciudades por estos estudios que cuentan con una alta empleabilidad.

Jornada sobre el papel de las matemáticas en la agricultura

El 10 de abril, el *Centro de Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa* (CDTIME), en colaboración con la *Red Española de Matemática–Industria* (Math–In), organizó la jornada *El papel de las matemáticas en la agricultura 4.0 y 5.0*, con el objetivo de explorar soluciones matemáticas aplicadas a los retos actuales de la agricultura.

Un momento de la actividad

El evento supuso un foro de transferencia de conocimiento entre la universidad y el sector agrícola en el ámbito de las matemáticas, fomentando la colaboración entre investigadores y empresas. El programa de la jornada se puede consultar en *www2.ual.es/cdtime/industryday*.

Actividades de la SAEM Thales

La *SAEM Thales* está organizando las siguientes actividades:

- *XLI Olimpiada Matemática Thales* para estudiantes de 2.º de ESO. El 14 de marzo se celebró la Fase Provincial en el *IES Gaviota* (Adra). Del 7 al 10 de mayo será la fase regional en Córdoba, y del 24 al 27 de junio la fase nacional en Lugo.
- *XXII JAEM* 2026*: Un viaje al interior de las matemáticas*, que se celebrará en Jaén, del 1 al 4 de julio de 2026. Más información en *22.jaem.es*.

Noticias matemáticas

Columnas de divulgación matemática

Los periódicos almerienses *Diario de Almería* e *Ideal* publican regularmente artículos de divulgación científica en colaboración con la *Facultad de Ciencias Experimentales*. Los relacionados con las matemáticas, desde la publicación del último número del Boletín, son:

- *La inteligencia artificial y el bien común*, por Enrique de Amo Artero (31/01/2026).
- *La dictadura del algoritmo*, por Fernando Reche Lorite (06/03/2026).
- *Matemáticas y economía de la guerra*, por Enrique de Amo Artero (16/04/2026).

12 de mayo, Día Internacional de las Mujeres Matemáticas

El 12 de mayo se celebra, desde 2019, el *Día Internacional de las Mujeres Matemáticas*, una efeméride destinada a reconocer y visibilizar la labor de las mujeres en el ámbito de las matemáticas.

Logo de la actividad

Durante el mes de mayo, distintas instituciones y sociedades matemáticas de todo el mundo organizarán actividades como charlas, talleres y encuentros para destacar las

ISSN 1988-5318

contribuciones de mujeres matemáticas de distintas épocas y fomentar la participación de nuevas generaciones en el ámbito científico.

Esta iniciativa fue impulsada por el *Comité de Mujeres* de la *Sociedad Matemática Iraní* en 2018 y coincide la fecha elegida con el nacimiento de la matemática iraní Maryam Mirzakhani, primera mujer en recibir la Medalla Fields.

Más información en *may12.womeninmaths.org*.

LXII Olimpiada Matemática Española y presentación de la LXIII edición que se celebrará en la Universidad de Almería

La fase nacional de la *Olimpiada Matemática Española* (OME) se celebró del 12 al 15 de marzo en la localidad de Las Rozas (Madrid). La competición congregó a 75 estudiantes procedentes de todo el país, haciéndose entrega de seis medallas de oro, doce de plata y dieciocho de bronce.

Los premiados con medalla de oro

Las seis medallas de oro fueron otorgadas a: Pablo Freire (Ourense), Pablo Arroyo (Madrid), Antonio Laso (Madrid), Diego Alonso (Salamanca), Alejandro Zuate (Madrid) y Guillermo Guerrero (Sevilla), quienes ostentan la representación del equipo español en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se celebrará en Shanghái en julio de 2026 y en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. ¡Mucha suerte!

De izda. a decha. Enrique de Amo, Ariadna Azor, Juan J. Moreno y Rosendo Ruiz

Ariadna Azor Gabaldón, estudiante de 4.º de ESO del *IES Cura Valera* de Huércal-Overa, ha participado en esta olimpiada en representación del equipo andaluz, tras clasificarse en la fase local de nuestra provincia y obtener la novena posición en la fase regional. ¡Enhorabuena!

Enrique de Amo Artero y Juan J. Moreno Balcázar acudieron a Las Rozas y presentaron a la *Universidad de Almería* como sede de la Olimpiada Matemática Española 2027.

European Girls' Mathematical Olympiad 2026

La *Olimpiada Femenina Europea de Matemáticas* (EGMO) se celebró durante los días 9 y 15 de abril en Burdeos (Francia). Se trata de una competición internacional en la que participan delegaciones de cincuenta países, con el objetivo de fomentar el talento matemático entre las jóvenes y promover la igualdad de género en las disciplinas científicas.

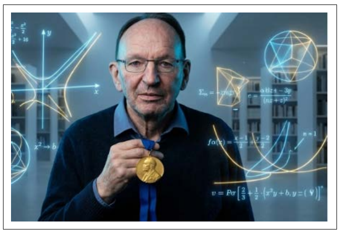
El equipo español

El equipo español estuvo integrado por: Vera Morancho Bargas (Barcelona), Violeta Jaikin Zlobina (Madrid), Claudia García Navarro (Madrid) y Liss Marian Estevez Suárez (A Coruña), tras clasificarse en las cuatro primeras posiciones de la *III Olimpiada Matemática Femenina*, que se celebró el 14 de febrero en León, donde compitieron con las mejores estudiantes clasificadas en las Fases previas de la Olimpiada Matemática Española. La representante almeriense, Ariadna Azor Gabaldón, fue una de las seleccionadas para participar en esta olimpiada.

Noche Europea de los Investigadores 2026

Desde el *Vicerrectorado de Política Científica* de la UAL se está organizando la decimoquinta edición de *La Noche Europea de los Investigadores* en Almería, que se celebrará el 25 de septiembre. Las matemáticas, como todos los años, estarán presentes [2].

Premio Abel 2026 para Gerd Faltings



Gerd Faltings

El matemático alemán Gerd Faltings ha sido galardonado con el *Premio Abel* 2026, otorgado por la Academia Noruega de Ciencias y Letras *«por sus influyentes aportaciones a la geometría aritmética y su impacto duradero en la teoría de números»*.

[2] Más información en *www.ual.es/otri/divulgacion-cientifica/la-noche-europea-de-los-investigadores-2026*.

ISSN 1988-5318

Faltings, ganador de la Medalla Fields en 1986, alcanzó gran reconocimiento al resolver la conjetura de Mordell, un avance clave para resultados posteriores como el último teorema de Fermat. Su trabajo ha sido esencial para el desarrollo de la geometría aritmética moderna y ha influido en numerosas áreas de las matemáticas.

El premio, conocido como el «Nobel de las matemáticas», está dotado con 7,5 millones de coronas noruegas (unos 680 000 euros). La ceremonia de entrega se celebrará en Oslo en mayo.

XXVII Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas

La XXVII edición del *Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas* (ENEM), organizado por la *Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas* (ANEM), se celebrará en Santiago de Compostela del 19 al 24 de julio.

Logo de la actividad

Este evento reúne a estudiantes de toda España con el objetivo de aprender, compartir conocimientos y conectar con otros jóvenes interesados en las matemáticas, al mismo tiempo que les brinda la oportunidad de acercarse al mundo profesional mediante el contacto directo con empresas del sector.

Durante esos días, expertos en áreas de matemáticas, física e inteligencia artificial impartirán conferencias, además habrá talleres y ponencias breves en las que los propios participantes podrán compartir ideas y habilidades. Más información en: *enem.anem.es/2026*.

First Lego League Edición 2025/26

El 14 de febrero se celebró la *First Lego League edición* 2025/26, un evento educativo organizado por la UAL y la *Asociación Ingeniera Soy*, enmarcado en un programa internacional que acerca a los jóvenes a la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEAM) de forma práctica y divertida.

A través de distintos retos y actividades, los participantes desarrollaron habilidades como la creatividad, la resolución de problemas y el trabajo en equipo, además de ganar confianza en el uso de la tecnología y despertar su interés por las vocaciones científicas.

En esta edición, la categoría *FIRST LEGO League Challenge*, dirigida a participantes de entre 10 y 17 años, se centró en el desafío *Unearthed*, relacionado con la arqueología. Durante meses, los equipos trabajaron en proyectos de innovación y en el diseño y programación de robots. El evento también incluyó las categorías *Discover* y *Explore*, lo que permitió la participación de escolares desde los 6 años.

Un momento de la actividad

En total, participaron más de 170 estudiantes distribuidos en 24 equipos, resultando ganador el equipo *Robótica Alhadra*. Además, se entregaron varios premios que reconocieron aspectos como los valores, la innovación o el diseño del robot, en una jornada marcada por el aprendizaje, la cooperación y el fomento de las disciplinas STEM entre los más jóvenes.

Les Maths en Scène

Logo de la actividad

Del 26 al 28 de marzo se celebró la décima edición del festival *Les Maths en Scène* en la ciudad francesa de Toulouse.

Nuestro compañero José Luis Rodríguez Blancas propuso un taller sobre cónicas utilizando diversos recursos, entre ellos, la herramienta *NeoTrie VR* que permite la exploración interactiva mediante realidad virtual de estos lugares geométricos.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a Engin Büyükaşık, del Izmir Institute of Technology de İzmir (Turquía); Maciej Czarnecki de University of Łódź (Polonia); Rachid El Maaouy, del Ecole Marocaine des Sciences de l'Ingenieur de Rabat (Marruecos); Abdenacer Makhlouf, de Université de Haute Alsace (Francia); y Alexis Molino Salas, de la Universidad de Granada.

Preguntas frecuentes

¿Qué áreas conforman el departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería?

El departamento de Matemáticas de la *Universidad de Almería* está formado por cinco áreas de conocimiento: *Álgebra*; *Análisis Matemático*; *Estadística e Investigación Operativa*; *Geometría y Topología*, y *Matemática Aplicada*.

El personal docente e investigador de estas áreas es el encargado de impartir la docencia de las distintas asignaturas del Grado en Matemáticas, así como de otras titulaciones de la universidad. Además de su labor docente, el departamento cuenta con diversos grupos de investigación en los que participan investigadores de las diferentes áreas. Entre ellos se encuentran: *Análisis Matemático*; *Teoría de Cópulas y Aplicaciones*; *Categorías, Computación y Teoría de Anillos*; *Modelos Aleatorios y Diseño de Experimentos*; *Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales* y *Análisis de Datos*.

¿Qué estudios relacionados con las Matemáticas se pueden realizar en la Universidad de Almería?

A nivel de grado, en la *Universidad de Almería* se pueden cursar el Grado en Matemáticas y el Doble Grado en Economía y Matemáticas. El primero tiene una duración de cuatro cursos académicos, mientras que para el segundo es necesario completar un total de cinco cursos. Además, directamente relacionado con las Matemáticas, también se ofrece el Grado en Física, este grado se ha implantado en el curso académico 2025/26 y se imparte de forma conjunta con la *Universidad de Huelva*.

Por otra parte, una vez finalizados los estudios de grado, es posible continuar la formación en Matemáticas cursando alguno de los siguientes másteres oficiales: Máster en Matemáticas y Doble Máster en Profesorado de Educación Secundaria y Matemáticas. Por último, la Universidad de Almería también ofrece la posibilidad de realizar el Doctorado en Matemáticas.

¿Dónde puedo consultar la información sobre el Grado en Matemáticas y el Doble Grado en Economía y Matemáticas?

Puedes consultar toda la información relativa a estos estudios en la página web de la *Universidad de Almería*, en los siguientes enlaces encontrarás los detalles de cada titulación:

- Grado en Matemáticas:
  www.ual.es/estudios/grados/presentacion/0419.
- Doble Grado en Economía y Matemáticas:
  www.ual.es/estudios/grados/presentacion/0463.

En estas páginas podrás acceder a información como el plan de estudios, el calendario académico, los horarios o el calendario de exámenes, así como a las opciones disponibles de becas y ayudas al estudio. Además, para conocer en profundidad cada asignatura, puedes consultar las guías docentes, donde se detalla el profesorado, los contenidos y el sistema de evaluación.

ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

Por cuatro esquinitas y la lógica en Educación Infantil

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Málaga

La resolución de problemas es una de las competencias centrales de las clases de educación matemática, no obstante ¿cómo presentamos los problemas al estudiantado de educación infantil de modo que sea una experiencia que tenga sentido y los motive?

En el grado de Educación Infantil de la *Universidad de Málaga* planteamos un taller que propone una posible respuesta a esta interrogante proponiendo el uso de los cuentos como una herramienta para situar las matemáticas y problematizar contextos cercanos y comprensibles para los infantes. Este taller es la inspiración para que el alumnado luego cree nuevas situaciones a partir de otros cuentos.

En la experiencia que se puede descargar en la página web *hdl.handle.net/10630/45257*, el cuento que inspira los problemas planteados se denomina *Por cuatro esquinitas de nada*, y fue escrito por Jérôme Ruillier. Es un libro ilustrado que matemáticamente se centra en las formas de los personajes —círculos y cuadrado— e invita a la reflexión sobre la convivencia, las diferencias y la inclusión.

En el aula, antes de leer el cuento se presenta la portada y se realizan preguntas para activar los conocimientos previos del alumnado, tales como: ¿Qué figuras observan en la portada? ¿Qué características tienen? ¿De qué creen que tratará el cuento? Enseguida se procede a leer el cuento y durante la lectura se hacen pausas para discutir, por ejemplo, qué características tienen los que pueden entrar

 ISSN 1988-5318

en la casa, cuáles son las diferencias entre cuadradito y los círculos, qué soluciones propondrían para que cuadradito pudiera entrar en la casa, entre otras cuestiones.

Tras leer el cuento se transfiere esta situación a otro contexto, esta vez se muestran las nuevas figuras que aparecen en el taller descargable. El alumnado del grado recorta las figuras, para así contar con un material manipulativo y responder las actividades que se presentan luego. En el caso de un aula de infantil la propuesta es tener las figuras ya recortadas o reproducirlas empleando un material más resistente y en un tamaño que favorezca la manipulación entre los infantes. El taller se centra en problemas que promueven el razonamiento lógico matemático, en concreto los objetivos son:

- Analizar las cualidades de las figuras: color, forma y tamaño.
- Establecer relaciones de equivalencia a través de la clasificación de las figuras según cualidades comunes. Primero una cualidad y luego dos.
- Representar las agrupaciones en diagramas (adaptados al contexto y con forma de casas o diagramas construidos con aros).
- Justificar la veracidad o falsedad de enunciados lógicos.

Lo primero es describir las figuras, para esto se invita al alumnado a construir tarjetas con los atributos que observan. En la figura 1 se muestra un ejemplo de las tarjetas que ha construido el alumnado. Notar que han planteado atributos que existes y por tanto se expresan como afirmaciones (ser rojo) y otros atributos corresponden a las negaciones y son señaladas con una cruz (ser no rojo). El primer grupo de etiquetas es el más sencillo y al llevar esta experiencia al aula de infantil los infantes pudieron construir estas etiquetas sin problema, no obstante, las negaciones son más complejas y su uso requiere de mayor mediación.

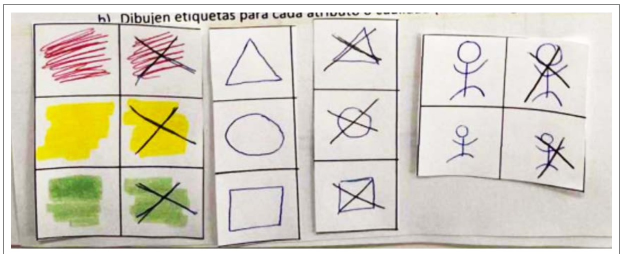


Figura 1. Etiquetas construidas por alumnado del grado

El segundo grupo de actividades busca promover el razonamiento deductivo. Es decir a partir de las etiquetas que se muestran en las puertas el alumnado clasifica las figuras mostrando quienes pueden o no entrar en cada casa. Los problemas crecen en grado de complejidad al comenzar con etiquetas que muestran un atributo —primero de forma afirmativa (ver figura 2) y luego de forma negativa— y continúan con casas que muestran dos cualidades.

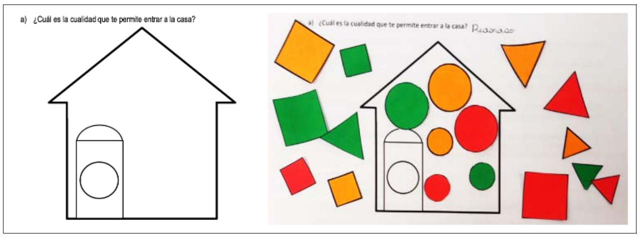


Figura 2. Casa en la que entran círculos

Las casas que tienen una puerta y dos cualidades ejemplifican el uso del conector «y», por ejemplo «ser grande y triángulo», mientras las casas que tienen dos puertas ejemplifican el conector «o», por ejemplo «ser amarillo o no pequeño» (ver figura 3).

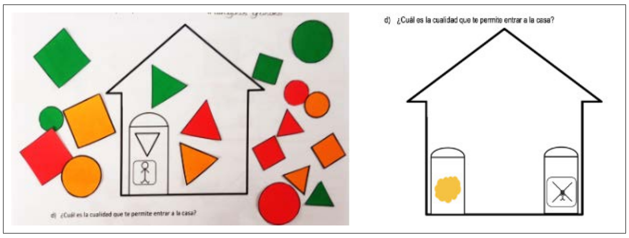


Figura 3. Tarea para el razonamiento deductivo

El tercer grupo de actividades se centra en tareas que fomentan el razonamiento inductivo. Es decir que a partir de casos particulares el alumnado tiene que determinar cuál es la etiqueta de cada casa. Se muestran algunas figuras que están dentro, para que completen con la etiqueta y el resto de las figuras (ver figura 4). Hay que recordar que estas actividades se han realizado en la modalidad de fichas de trabajo, pero con el alumnado de infantil es mejor realizarlas en un formato diferente.

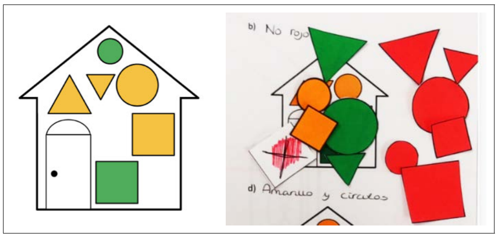


Figura 4. Tarea para promover el razonamiento inductivo

El cuarto grupo de tareas apunta a promover la justificación y argumentar quién se ha equivocado de casa. Y el quinto grupo de tareas busca transferir el conocimiento adquirido en el contexto del cuento o un contexto diferente y más cercano a las matemáticas formales, es por eso que se presentan tres tipos de diagramas que muestran distintos tipos de relaciones.

Una representación muestra dos conjuntos separados (disjuntos) que permiten clasificar figuras cuyos atributos no pueden observarse al mismo tiempo; por ejemplo, ser triángulo y círculo a la vez (ver figura 5A). Otra representación muestra dos conjuntos con una intersección (ver figura 5B), lo que permite clasificar figuras que pueden compartir atributos; por ejemplo, una figura puede ser amarilla y cuadrada a la vez. En este caso, la región común representa las figuras que cumplen ambos atributos, lo que hace que el diagrama sea más complejo al contemplar varias combinaciones posibles.

 ISSN 1988-5318

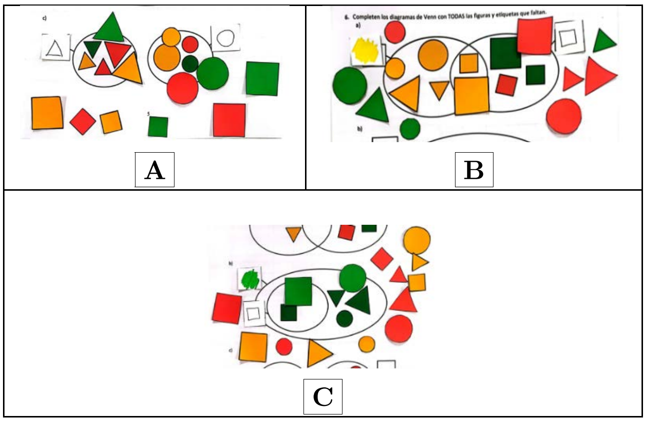


Figura 5. Distintos tipos de diagramas de Venn

Y el último tipo de diagrama es el que representa que un conjunto es subconjunto de otro (ver figura 5C), en este caso todas las figuras del conjunto mayor comparten un atributo general (por ejemplo, ser verdes), mientras que dentro de él aparece un conjunto más específico formado por aquellas figuras que, además de ser verdes, son cuadradas.

En síntesis, esta experiencia que toma como contexto un cuento ilustrado no se limita al reconocimiento de formas, sino que propone un recorrido progresivo: identificar atributos, etiquetarlos, clasificar figuras según condiciones dadas (las «casas»), detectar errores y finalmente completar diagramas de Venn. Al apoyarse en el mensaje inclusivo del cuento *Por cuatro esquinitas de nada*, la actividad convierte la clasificación en una experiencia con sentido para el alumnado, ya que, a partir de una historia cercana sobre diferencia y convivencia, les permite comprender que establecer criterios no implica excluir, sino reconocer atributos, analizar pertenencias y reflexionar sobre cómo las reglas pueden adaptarse para incluir, favoreciendo así el desarrollo del razonamiento lógico–matemático en un marco narrativo cercano. ■

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Matemáticas en un cuadro

David Crespo Casteleiro
Instituto Provincial de Educación Permanente (Almería)

La educación de adultos está capitaneada, en este vértice del mapa peninsular, por el *Instituto Provincial de Educación Permanente* (IPEP) de Almería, del que depende una extensa e intrincada red de centros formando un galimatías de siglas que no reproduzco para evitar la perplejidad del lector. Porque ciertamente, hasta tomar conciencia de la complejidad del sistema, y la diversidad de las modalidades ofertadas, ha podido transcurrir el primer trimestre.

Este alumnado, en algún momento de un tiempo pretérito, se apartó del sistema educativo y no siempre tuvo la capacidad de tomar aquella decisión, viéndose en muchas ocasiones condicionado por su situación socioeconómica. Por lo tanto, y mucho más allá de los saberes básicos o de los criterios de evaluación, el profesorado se enfrenta al reto de emplear una metodología donde el alumnado no vuelva a reencontrarse a la primera de cambio con los mismos fantasmas del pasado.

El IPEP de Almería tiene el hándicap de evitar el abandono tras los primeros exámenes, por lo que la tipología de las actividades también debe sufrir una revisión. Dentro de todas ellas, la *Yincana* es sin duda una que sobresale del resto, tanto por aunar a todos los departamentos didácticos y enseñanzas, como por visibilizar la institución, llevando los contenidos fuera del aula para dar una vez más respuesta al mantra de *«¿y esto para qué sirve?»*

Y puesto que se fecha para hacerla coincidir con la efeméride del *Día Internacional de la Mujer*, su presencia suele ser el eje vertebrador, siendo este año bajo el lema *Y ellas ¿qué pintan?*, en la que usando algún cuadro se pretende establecer la sinergia adecuada para trasladar conocimiento.

Dispuesto a dar una nota de color, el profesorado agrupado en torno a una pintura, y ataviado para el momento, plantea actividades y retos evaluables que el alumnado debe superar por equipos, al que también anima a disfrazarse.

Ilustración 1: Profesorado del IPEP

En esta ocasión, los matemáticos y matemáticas estábamos muy solicitados, tanto que tuvimos que participar en dos obras situadas en diferentes escenarios: *Moulin Rouge* (de Toulouse-Lautrec en la plaza Careaga) donde se ponía en valor el papel de aquellas bailarinas, planteando problemas sobre proporcionalidad y porcentajes y *La Gioconda* (de Leonardo da Vinci en la plaza de la Catedral), trabajando cuestiones como la proporcionalidad geométrica, enlazando conceptos de la razón áurea y la sucesión de Fibonacci.

Y es que el cuadro más famoso de la historia, es un retrato pintado por el universal florentino a comienzos del siglo XVI en el que muestra a Mona Lisa, esposa del comerciante de telas Francesco del Giocondo, razón que explica el sobrenombre de *Gioconda* (Museo del Louvre, 2026).

El *cinquecento* se vio profusamente influenciado por la cultura antigua, volviendo a renacer proporciones como la división de un segmento en media y extrema razón, que fue ampliamente estudiada, entre otros, por Leon Battista en *De re aedificatoria* (1452) o por Luca Pacioli en *La divina proporción* (1498) con ilustraciones de da Vinci (Crespo, 2024, pp 61–62). Estas fundadas razones hacen que la *Gioconda* esté modelizada en términos del número de oro (Corbalán, 2010, p. 106), al igual que múltiples espacios de la seo almeriense, lo que constituía el leitmotiv de las tres actividades propuestas en relación a este cuadro.

La primera de ellas consistió en identificar proporciones notables en la portada principal, donde con la ayuda de distintos rectángulos con razón áurea, raíz de cinco, raíz de dos y duplo, ayudados de las homotecias, se pueden situar tales polígonos gobernando los espacios (Crespo, 2024, pp. 78–92).

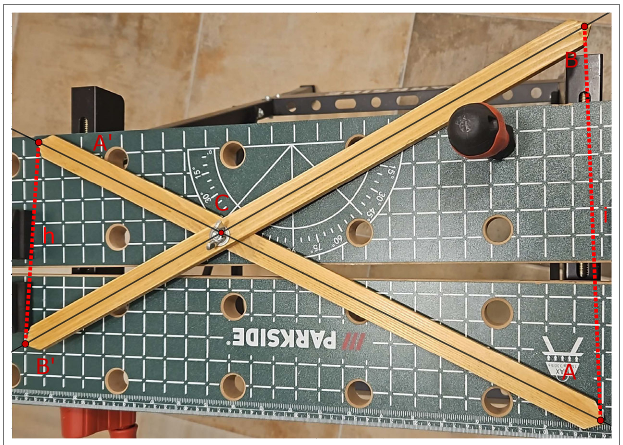


Ilustración 2: el compás áureo

La segunda pretendía localizar la proporción dorada en el cuerpo humano, haciendo uso de un compás áureo, un instrumento similar a un compás donde el lugar de giro se sitúa en un punto en el que su longitud se divide en media y extrema razón, pudiendo con las aberturas paralelas comprobar si se encuentran relacionadas de esta forma. En efecto:

Puesto que los triángulos ACB y $B'CA'$ son semejantes (porque comparten el ángulo $\widehat{BCA} = \widehat{B'CA'}$ y tienen los lados adyacentes proporcionales) y dado que el punto C divide al segmento AA' en proporción áurea, es decir $\frac{AC}{CA'} = \phi$:

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{AB}{A'B'} = \phi.$$

Aprovechando la solería de la plaza de la Catedral, formada por cuadrados cuyo lado tomamos como unidad, la tercera actividad consistió en la confección de una espiral de Fibonacci, una curva que se construye por la concatenación de cuartos de circunferencia.

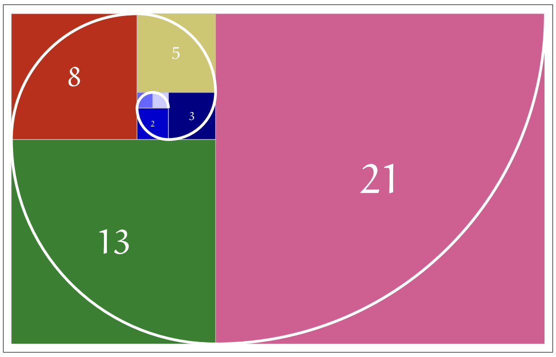


Ilustración 3: Espiral de Fibonacci

Sus radios son los términos de la famosa sucesión (donde los dos primeros términos son la unidad y a partir del tercero se obtiene como la suma de los dos anteriores) y que guarda una estrecha relación con el número de oro. Comprobemos esta afirmación, para lo que denotamos por $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ y claramente:

$$\begin{cases} F_1 = 1, \ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Esta ecuación en diferencias es lineal y homogénea por lo que recurrimos a su ecuación característica $\lambda^2 = \lambda + 1$ cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

esto es $\lambda_1 = \phi$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{\phi}$, de donde la solución fundamental de la ecuación en diferencias es

$$F_n = A\phi^n + B\left(\frac{-1}{\phi}\right)^n.$$

Al imponer las condiciones $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$ se obtiene sin dificultad que $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, lo que conduce a la obtención del término general, sin necesidad de la recurrencia:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n\right], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y al considerar la sucesión de cocientes entre un término y el anterior, resulta que converge al número de oro, esto es, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \phi$. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n} = \phi.$$

Es decir, que si consideramos un rectángulo cuyos lados son dos términos *grandes* de la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, no se distingue a simple vista del rectángulo áureo, ni por lo tanto de la espiral homónima.

A modo de síntesis, quisiera concluir trasladando la alta participación y compromiso del alumnado, que en algunos casos supuso tener que pedir un día adelantado de sus vacaciones para poderse sumar a un evento, donde especialmente las Matemáticas se pueden admirar en un cuadro.

Referencias

[1] Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA

[2] Crespo, D. (2024). *La Catedral de Almería bajo una visión matemática.* Editorial Universidad de Almería.

[3] Museo del Louvre (24 de marzo de 2026). De la «Gioconda» a «Las bodas de Caná». La sala de los Estados [3].

■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Maths. . . and in English too?

What else could there be?

Rubén Jorge Redondo Romero
IES Algazul (Roquetas de Mar, Almería)

Talking about maths already tends to trigger more than a few grimaces in the classroom. If we add English as the language of instruction, the reaction can be almost immediate: "That must be impossible!".

But is it really?

If we ask students in any secondary school which subject they find most difficult, maths will probably be the most common answer. And if we ask again, this time excluding science subjects, English often takes that same spot. So putting the two together might seem, at first glance, like the perfect recipe for disaster. However, classroom reality tells quite a different story.

To begin with, maths and English are not as different as they may seem. At their core, both are languages. Each has its own rules, its own way of organising ideas and expressing them. And both are learned step by step, building on what has already been understood. It's like a puzzle where every piece is needed to make sense of the next one.

In class, I sometimes explain it with a very simple example: "Just as you can't use the present continuous without first knowing the verb to be, you can't work with polynomials if you don't understand the distributive property." When students see it this way, they begin to realise that these are not two separate worlds, but two ways of learning that can support each other.

So, is learning maths in English more difficult? Not necessarily. In fact, sometimes the opposite happens: using English helps students pay closer attention, think more carefully, and better understand what they are doing.

Another big question is whether it is worth it. And here, the answer is clear: absolutely. English is nowadays the language of science, technology and research. Most articles, studies and resources are written in this language. Learning maths in English does not just mean acquiring new vocabulary; it also opens a huge window to the world. It gives students access to more information, more tools and more opportunities.

And then we come to the classic classroom question: "What is this for?" The most honest answer is: for almost everything. You just need to know where to look. For example, in class we recently worked on a project where students became a travel agency. They had to design an itinerary, calculate costs, estimate profit. . . in other words, apply maths to a real–life situation. And they did all of this using English as their working language.

The result was very interesting: not only did they practise topics such as percentages and financial calculations, but they were also able to find much more information thanks to using English. Suddenly, what once seemed difficult starts to make sense.

In the end, combining maths and English is not only possible, but can be highly enriching. Of course, like any learning process, it requires time, patience and practice.

Therefore, it is worth keeping two key ideas in mind. First, bilingual learning may be challenging at the beginning, but it eventually brings very valuable results. And second, the role of teachers is essential: we are the ones who build bridges, design meaningful experiences, and help students discover that learning in another language is not a barrier, but an opportunity. ■

[3] *www.louvre.fr/es/explora/el-palacio/de-la-gioconda-a-las-bodas-de-cana.*

 ISSN 1988-5318

Concurso de problemas

Problema propuesto

Al hablar de enteros nos referimos a los números sugeridos por la siguiente lista:

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si p es uno de ellos, los múltiplos de p son los enteros de la forma kp donde k es un entero arbitrario (en particular, 0 es un múltiplo de p).
Considera el siguiente experimento: *Se elige un entero al azar. Si es par, se multiplica por 5. Si es impar, se multiplica por 3.*
Calcula la probabilidad de que el entero obtenido como resultado del experimento sea:

1. Par.
2. Múltiplo de 3.
3. Múltiplo de 7.
4. La suma de un múltiplo de 2 y un múltiplo de 3.
5. La suma de un múltiplo de 8 y un múltiplo de 12.

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un estupendo ***reloj inteligente (smartwatch)*** y un regalo relacionado con las matemáticas.
¡La solución más elegante u original tiene premio!
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico del Boletín bmatema@ual.es ***hasta el 16 de octubre de 2026***.
Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.
Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior

Paula Ayala

El jurado ha considerado que la solución ganadora ha sido la propuesta por Paula Ayala Román, estudiante de segundo de Bachillerato del *IES Alborán–Manuel Cáliz* de Almería. Se han presentado muchas soluciones correctas mediante el uso de integrales. La ganadora usa un resultado de la antigüedad clásica debido a Arquímedes con argumentos perfectamente justificados.

Problema propuesto en el número anterior

Una agricultora llamada Antonia se compró un terreno rústico cuya superficie está limitada por las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4,$$
$$g(x) = -x^2 + 4.$$

Se sabe que el área de la finca está en hectáreas.

1. Realiza un boceto del terreno que adquirió Antonia.
2. Calcula el área total del terreno.
3. Si cada hectárea en la región tiene un valor aproximado de 18 500 euros, ¿cuál fue el coste total del terreno? ¿Es correcto si alguien afirma que costó menos de 48 000 euros?
4. ¿Qué puntos de la recta $y = 2$ pertenecen al terreno? ¿Cuál es el valor de la parte del terreno situada bajo dicha recta?

Solución ganadora:

Las funciones f y g (funciones polinómicas de segundo grado) tienen como representación gráfica una parábola P_1, con las ramas hacia arriba en el caso de f y una parábola P_2 con las ramas hacia abajo en el caso de g.

En la siguiente tabla se recogen los puntos fundamentales de ambas parábolas orientados a proceder a su representación.

Función	Corte eje X	Corte eje Y	Vértice
$f(x) = x^2 - 4 + 4$	$A(2,0)$	$C(0,4)$	$A(2,0)$
$g(x) = -x^2 + 4$	$E(-2,0)$ $A(2,0)$	$C(0,4)$	$C(0,4)$

Apartado 1:

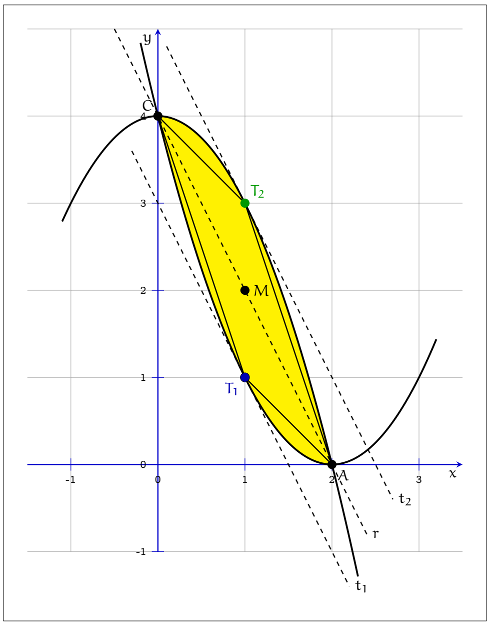
Determinamos ahora los puntos de corte de ambas gráficas, es decir, los puntos que verifican que $f(x) = g(x)$:

$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(2x - 4) = 0,$$

lo que implica que las curvas se cortan cuando $x = 0$ y $x = 2$. Por lo tanto los puntos de corte de las parábolas son $C(0,4)$ y $A(2,0)$.

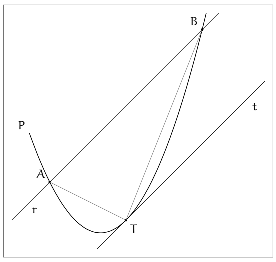
Teniendo en cuenta lo anterior el terreno correspondería a la región sombreada de la siguiente figura:

ISSN 1988-5318



Representacón gráfica de la región correspondiente al terreno

Apartado 2:



Representación del teorema de la cuadratura de la parábola de Arquímedes

Para el desarrollo que hago a continuación no he empleado el cálculo integral (siglo XVII), en su lugar he utilizado un resultado muy anterior debido a Arquímedes (siglo III a. C.) que en su tratado sobre la cuadratura de la parábola demostró el siguiente teorema: *«Dada una parábola* P *y una recta* r *secante a ella. Si trazamos la recta* t *tangente a* P *que sea paralela a* r*, el área de la región delimitada por* r *y la parábola* P *es* $\frac{4}{3}$ *del área del triángulo* ATB *donde* T *es el punto de tangencia de* P *y* t*».*

Consideremos la recta que pasa por $A(2,0)$ y $C(0,4)$ que tiene por ecuación: $r : 2x + y - 4 = 0$. Dicha recta tiene de pendiente $m = -2$.

Consideramos las rectas t_1 y t_2 , paralelas a la recta r que son tangentes respectivamente a las parábolas P_1 y P_2. $T_1(1,1)$ y $T_2(1,3)$ son los puntos de tangencia.

Los triángulos AT_1C y AT_2C comparten la base AC (de longitud $2\sqrt{5}$) y sus respectivas alturas valen en ambos casos $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (distancias de T_1 y T_2 a la recta r), de ahí que sus áreas sean $\frac{2\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = 1$.

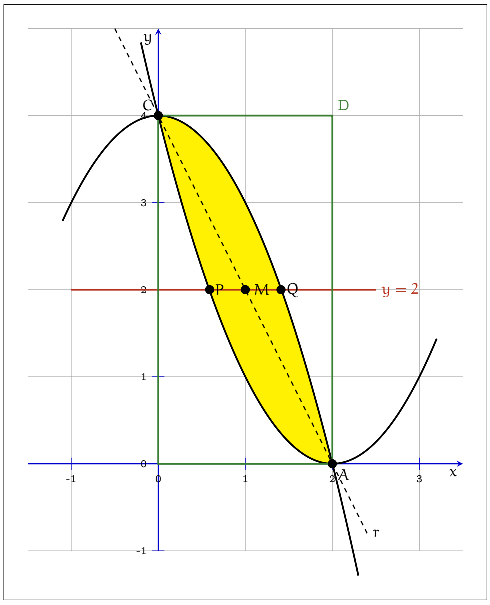
Aplicamos el teorema de Arquímedes a ambas parábolas. Al tener los triángulos el mismo área, las secciones de ambas parábolas serán iguales entre sí, por lo que se concluye que el área del terreno será $2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$ ha.

Apartado 3:

El precio del terreno será $\frac{8}{3} \cdot 18\,500 \approx 49\,333$ euros. Para que la afirmación fuera cierta el precio de la hectárea debería ser de 18 000 euros.

Apartado 4:

Determinamos los puntos de corte de ambas parábolas con la recta $y = 2$. De las posibles soluciones nos quedaremos con los puntos cuyas abcisas estén en el intervalo $[0, 2]$.



- Corte con la parábola P_1: solucionamos la ecuación $f(x) = 2$, es decir, $x^2 - 4x + 4 = 2$, cuyas raíces son $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{2}$. De estas dos soluciones, nos quedamos con x_2, por lo que tendremos el punto $Q(2 - \sqrt{2}, 2)$.
- Corte de la parábola P_2: buscamos las soluciones de la ecuación $g(x) = 2$, es decir, $-x^2 + 4 = 2$, que tiene como raíces $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$. En este caso, nos quedamos con x_1, por lo que el punto de intersección es $Q(\sqrt{2}, 2)$.

Los puntos de la recta $y = 2$ que pertenecen al terreno serán todos los puntos del segmento de extremos P y Q.

La figura que delimita el terreno es simétrica con respecto al punto $M(1, 2)$ (centro del rectángulo $OADC$ que inscribe la región).

Tomemos un punto del arco AC de la parábola P_1, $T(x_0, y_o)$, con $x_0 \in [0, 2]$. Llamemos $T'(x'_0, y'_0)$ al punto simétrico de T con respecto a M.

Por ser T un punto de la parábola P_1, se verifica que:

$$y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 4. \qquad (1)$$

Por ser T' el punto simétrico de T respecto a M, se verificará que

$$\frac{x_0 + x'_0}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = 2 - x'_0,$$
$$\frac{y_0 + y'_0}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = 4 - y'_0.$$

Si sustuimos ambas expresiones en (1), tenemos que

$$4 - y'_0 = (2 - x'_0)^2 - 4(2 - x'_0) + 4.$$

Si operamos y simplificamos, la igualdad anterior queda de la forma:

$$y'_0 = -x'^2_0 + 4.$$

ISSN 1988-5318

Este resultado demuestra que el punto T' pertenece al arco AC de la parábola P_2. Dicho punto es la intersección de la recta que pasa por T y M con la parábola P_2.

De igual manera, elegido un punto del arco AC de la parábola P_2, su simétrico respecto de M pertenecerá al arco de extremos A y C de la parábola P_1.

Como consecuencia de la simetría, cualquier recta que pasa por M divide a la región en dos regiones con el mismo área.

En definitiva, la recta $y = 2$ pasa por el punto M, por lo que dicha recta divide el terreno en dos partes iguales, es decir, el área bajo $y = 2$ seá la mitad del total, $\frac{4}{3}$ ha y su precio $\frac{4}{3} 18\,500 \approx 24\,667$ euros.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Huygens y parte de su obra probabilística

Antonio Luis Rodríguez López-Cañizares
Salvador Cruz Rambaud
Universidad de Almería

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi [4]
Georg Cantor.

La presente nota pretende, de forma breve, acercar a los potenciales lectores a la figura egregia del holandés Christiaan Huygens (1629–1695) y, en particular, a su aportación pionera en el cálculo de probabilidades, materia que nace en el verano de 1654 con la correspondencia entre Pascal (1623–1662) y Fermat (1601–1665) pero que se consolida como disciplina matemática en 1667 cuando Huygens publica una adenda a la obra *Exercitationes mathematicae* de su profesor Frans van Schooten (1615-1660).

Dicha adenda llevaba el título *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Cálculos en los juegos de azar). Al final de su opúsculo, Huygens propone una lista de cinco problemas[5]

Estos problemas que, en su tiempo, fueron problemas difíciles, ahora pueden, todos ellos, ser resueltos por algún buen estudiante de Bachillerato que se ponga a la tarea (de hecho es un buen ejercicio tratar de resolverlos sin mirar las soluciones que aquí ofrecemos). Solo el problema quinto presenta una dificultad mayor que los otros pues, en el mismo, hay que plantear la siguiente ecuación en diferencias finitas: $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$, con $u_0 = 0$ y $u_{24} = 1$ (la resolución que presentamos es elemental pues no utiliza las técnicas de las Ecuaciones en Diferencias Finitas).

Algo sobre Huygens [6].

Huygens pertenecía a una familia rica y recibió una esmerada formación privada, aunque su dominio del latín no era perfecto. Sabía tocar el laúd. Su padre fue diplomático y amigo personal de Descartes. Él, al igual que su «discípulo» en geometría Leibniz (1646–1716) y su admirado Newton (1642–1727), a los que conoció personalmente, permaneció soltero toda su vida.

Sus aportaciones a la Física y a la Astronomía fueron sobresalientes, aunque resulta curioso saber que nunca aceptó la ley de la gravitación universal de Newton. Le tocó vivir en tiempos turbulentos y, especialmente, le afectó la hostilidad al protestantismo que culminó en 1685 con el edicto de Fontainebleau de Louis XIV (1638–1715) que anuló el de Nantes decretado por su abuelo Henri IV (1553–1610) en 1598, que permitía a los hugonotes practicar libremente su religión. Huygens ya había abandonado París cuatro años antes (después de una estancia de 15 años como miembro de *l'Academie des Sciences*).

Su obra probabilística marca un hito en la historia del cálculo de probabilidades y hubo que esperar más de 50 años para que se publicasen tres grandes tratados sobre esta materia: En 1708 (*Essay sur le jeux du hasard* de P. Rémond de Montmort (1678–1719); en 1713, la obra póstuma *Ars conjectandi* de Jacob Bernoulli (1654–1705); y, en 1718, *The Doctrine of Chances* de Abraham de Moivre (1767–1754), que dedicó a Newton).

Christiaan Huygens a la izquierda. A la derecha, su padre Constantijn con su secretario (este cuadro fue pintado por Keyser y se conserva en la National Gallery de Londres)

En esta obra, el autor, con muestras de humor, deja claro, en un breve y jugoso prólogo, que su escrito va dirigido a ampliar la gran anchura del maravilloso campo del *Arte Algebraico* que también puede aplicarse al cálculo de los juegos de azar y con cierta ironía concluye:

> *Encontrarán, al final de este tratado, que he propuesto algunas cuestiones del mismo tipo sin indicar el método de prueba. Esto lo he hecho en primer lugar porque me hubiera costado mucho trabajo desarrollar sucintamente el razonamiento necesario para llegar*

[4] En matemáticas el arte de plantear una cuestión es más valiosa que el de resolverla.

[5] Otras listas de problemas famosos, por poner algunos ejemplos, son: Los 23 problemas de Hilbert, los 7 problemas del milenio y los 53 *problemas* que Alcuino de York (735–804) envió a Carlomagno para uso de las escuelas catedralicias y monacales.

[6] Un resumen biográfico valioso está en *mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Huygens*.

a la contestación y en segundo porque me parece útil dejar algo a mis lectores sobre lo que pensar (si es que tengo lectores) y esto les servirá como ejercicio y como pasatiempo: Tu seguro servidor, Christian Huygens de Zuylichem.

Enunciados de los 5 problemas propuestos en *De ratiotiniis. . .*

Problema 1.- $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ juegan juntos con un par de dados y bajo las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{A}$ ganará si saca seis y $\mathcal{B}$ si saca siete.
2. $\mathcal{A}$ tira primero una vez y, a continuación, $\mathcal{B}$ tira dos veces seguidas.
3. $\mathcal{A}$ tira dos veces seguidas, y así continuan hasta que uno de los dos gana.

La pregunta es: ¿En qué proporción están las posibilidades de uno y otro de ganar? (Respuesta: Como de 10 355 a 12 276 más)

Problema 2.- Tres jugadores $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ toman doce fichas, de las que cuatro son blancas y ocho negras, y juegan bajo las siguientes condiciones:

1. El primero de ellos que elija una ficha blanca ganará.
2. $\mathcal{A}$ comenzará el juego y, a continuación, le seguirán $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, que será el tercero en el turno.
3. De nuevo, $\mathcal{A}$ será el que juegue, y así sucesivamente.

¿En qué proporción están las probabilidades de ganar de los jugadores?

Problema 3.- $\mathcal{A}$ acuerda con $\mathcal{B}$ que sacará cuatro cartas de un mazo de cuarenta cartas (cada palo tiene diez cartas) de forma que cada carta pertenecerá a un palo diferente y que la proporción de su suerte respecto a la de $\mathcal{B}$ es como de 1000 a 8139. ¿Es correcto?

Problema 4.- Habiendo elegido doce fichas como antes, cuatro blancas y ocho negras, $\mathcal{A}$ conviene con $\mathcal{B}$ que, con los ojos tapados, tomará siete de ellas entre las que habrá tres negras. ¿Cuál es la proporción de las probabilidades de cada uno de los jugadores?

Problema 5.- $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen doce monedas cada uno, y juegan con tres dados bajo las siguientes condiciones:

1. Si sale el número once, $\mathcal{A}$ dará a $\mathcal{B}$ una moneda, pero si sale el catorce, será $\mathcal{B}$ quien dé a $\mathcal{A}$ una moneda.
2. Ganará el juego el que obtenga todas las monedas del otro.

Las posibilidades de ganar de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están en la proporción exitente entre los números 244 140 625 y 282 429 536 481. ¿Es correcto?

Resolución de los cinco problemas

Problema 1.- Llamemos A y B a los sucesos de que, en una tirada, gane $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$ respectivamente y $\overline{A}, \overline{B}$ a los sucesos contrarios a estos dos. Designemos con las letras $u, v, \overline{u}, \overline{v}$ las respectivas probabilidades de estos 4 sucesos.

Se cumple: $u = 5/36$; $v = 1/6$; $\overline{u} = 31/36$ y $\overline{v} = 5/6$.

Vamos a calcular la probabilidad de que gane el jugador $\mathcal{A}$. Su victoria solo puede ocurrir en alguna de las tiradas $1, 4, 5, 8, 9, \ldots$ (es decir, en las tiradas que le corresponden, que son las múltiplos de 4 o las múltiplos de $4 + 1$).

Naturalmente, para que este jugador gane en la tirada $4n$, con $n \geq 1$, tiene que sacar 6 en esta tirada y haber fracasado antes en las $2n - 1$ tiradas anteriores y que $\mathcal{B}$ fracasase en $2n$ tiradas.

La probabilidad de que esto ocurra es $\overline{u}^{2n-1}\overline{v}^{2n}u$.

Análogamente, la probabilidad de que su victoria la consiga en la tirada $4n + 1$ es $\overline{u}^{2n}\overline{v}^{2n}u$. La suma de estas dos probabilidades es:

$$\overline{u}^{2n-1}\overline{v}^{2n-1}(1+\overline{u})\overline{v}u = (1+\overline{u})\overline{v}u\{\overline{u}^{2n-1}\overline{v}^{2n-1}\}.$$

Por tanto, la probabilidad buscada es:

$$u + (1+\overline{u})\overline{v}u\{\overline{uv} + \overline{u}^3\overline{v}^3 + \overline{u}^5\overline{v}^5 + \ldots\}$$

expresión que, por tratarse de una serie geométrica, es equivalente a:

$$u + (1+\overline{u})\overline{v}u\left\{\frac{\overline{uv}}{1-\overline{u}^2\overline{v}^2}\right\} = \mathbf{\frac{12\,276}{22\,631}}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que triunfe el jugador $\mathcal{B}$ es $1 - \frac{12\,276}{22\,631} = \frac{10\,355}{22\,631}$, como Huygens advirtió.

Ploblema 2.- Añadimos a las notaciones introducidas en el problema anterior la siguiente: C es el suceso que ocurre si gana el jugador $\mathcal{C}$ y w y $\overline{w}$ las probabilidades de que esto ocurra o no.

La probabilidad que tiene un jugador, en su turno, de sacar una ficha blanca es $1/3$ y, por tanto, de no sacarla es $2/3$. Sin embargo, para calcular la probabilidad de ganar que tiene cualquier jugador hay que relacionarlo con el fracaso que hayan tenido antes los jugadores que le precedieron, es decir v depende de u, y w depende de u y de v.

En concreto, $v = 2/3u$ y $w = 2/3v$, luego

$$\begin{aligned}
1 &= u + v + w \\
&= u + \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}v, \\
&= u\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{19}{9}u, \\
&\Rightarrow (u, v, w) = \left(\frac{9}{19}, \frac{6}{19}, \frac{4}{19}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la terna pedida es $(9, 6, 4)$, que son los numeradores de las fracciones obtenidas.

Problema 3.- La baraja española de 40 cartas (con los palos: bastos, espadas, oros y copas) nos sirve de modelo. Sacando (sin reemplazamiento) 4 cartas, la probabilidad de que cada una sea, en este orden, de los palos antedichos es:

$$\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{10}{38}\cdot\frac{10}{37}=\frac{125}{27\,417},$$

pero, teniendo en cuenta que hay 24 formas de permutar los 4 palos, la probabilidad pedida es

$$24\cdot\frac{125}{27417}=\frac{1000}{9139}.$$

Problema 4.- No hay inconveniente en considerar las fichas distintas entre sí aun siendo del mismo color. Las posibles extracciones de 7 elementos de un conjunto que tiene 12 elementos es $\binom{12}{7}=792$ pero el caso favorable al jugador $\mathcal{A}$ será que, de las 7 extraídas, 3 sean blancas y las demás negras. En total: $\binom{4}{3}\binom{8}{4}=35\cdot 70=280$. Luego la probabilidad pedida es $\frac{280}{792}=\frac{35}{99}$.

Problema 5.- La tirada de los 3 dados la hace la «banca». La probabilidad de que la suma sea 11 o 14 es, respectivamente, 27/216 o 15/216. Puesto que si no sale ninguna de estas sumas se vuelve a tirar, la tirada definitiva es favorable a $\mathcal{A}$ si sale 14 con probabilidad $q=27/42=9/14$, y desfavorable si sale 11 con probabilidad $p=1-q=5/14$.

La probabilidad que tiene $\mathcal{A}$ de ganar depende de las fichas que tenga en ese momento. Sea u_k dicha probabilidad cuando tiene k fichas (obviamente $u_0=0$, $u_{24}=1$ y nos proponemos calcular u_{12}).

Esta probabilidad depende de la probabilidad cuando tenía una ficha más y una ficha menos. En efecto, se tiene la igualdad

$$u_k=qu_{k-1}+pu_{k+1}.$$

Pero, teniendo en cuenta que $p+q=1$, se tiene que $(p+q)u_k=qu_{k-1}+pu_{k+1}$ y entonces

$$p(u_{k+1}-u_k)=q(u_k-u_{k-1})\Rightarrow u_{k+1}-u_k=h(u_k-u_{k-1}),$$

siendo $h=q/p$. Si utilizamos esta igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}u_{k+1}-u_k&=h(u_k-u_{k-1}),\\ u_k-u_{k-1}&=h(u_{k-1}-u_{k-2}),\\ &\vdots\\ u_2-u_1&=h(u_1-u_0),\end{aligned}$$

lo que implica que $u_{k+1}-u_k=h^k u_1$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}u_{24}=1&=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_{24}-u_{23})\\ &=u_1(1+h+h^2+\cdots+h^{23})\\ &=u_1\frac{h^{24}-1}{h-1}\end{aligned}$$

Calculemos u_{12}:

$$\begin{aligned}u_{12}&=u_1\frac{h^{12}-1}{h-1}\\ &=\frac{h-1}{h^{24}-1}\frac{h^{12}-1}{h-1}\\ &=\frac{h^{12}-1}{h^{24}-1}\end{aligned}$$

Como $1-u_{12}=\dfrac{h^{12}(h^{12}-1)}{h^{24}-1}$, tenemos que;

$$\frac{u_{12}}{1-u_{12}}=\frac{1}{h^{12}}=\frac{5^{12}}{9^{12}}=\frac{244\,140\,625}{282\,429\,536\,481}.$$

Referencias

[1] Gigerenzer G. et al. (1987) *The Empire of Chance.* Cambridge University Press.

[2] Hald A. (2003) *History of Probability and Statistics and their applications before 1750.* Wiley and Sons. Inc.

[3] Struik, D. J. (1981) *The land of Stevin and Huygens.* D. Reydel.

[4] Todhunter, I. (1865) *A History of the Mathematical theory of Probability.* Macmillan.

■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Cecilia Payne–Gaposchkin

La mujer que entendió las estrellas antes que su tiempo

Maribel Ramírez Álvarez
Universidad de Almería

A veces la historia de la ciencia cambia gracias a una pregunta formulada con rigor, paciencia y valentía. Cecilia Payne–Gaposchkin fue una de esas personas capaces de alterar nuestra comprensión del universo a partir de una intuición científicamente sólida. Su nombre ocupa hoy un lugar central en la astronomía del siglo XX, porque fue la primera científica en demostrar que las estrellas están compuestas principalmente por hidrógeno y helio. Sin em-

ISSN 1988-5318

bargo, durante muchos años, su contribución no recibió el reconocimiento que merecía. Su trayectoria constituye, por ello, no solo una de las grandes historias de la astrofísica moderna, sino también un ejemplo elocuente de cómo el talento científico de muchas mujeres tuvo que abrirse paso en instituciones construidas para excluirlas.

Cecilia Payne–Gaposchkin

Cecilia Helena Payne, más tarde Cecilia Payne–Gaposchkin tras su matrimonio con el astrónomo Sergei Gaposchkin, nació en 1900 en Wendover, en Buckinghamshire (Inglaterra). Desde muy joven mostró una curiosidad intelectual poco común y una inclinación profunda hacia el estudio del mundo natural. Su formación inicial fue amplia y exigente: estudió botánica, física y química en el *Newnham College* de la *Universidad de Cambridge*.

Sin embargo, como sucedía con tantas mujeres de su generación, esa brillante formación no podía traducirse todavía en un reconocimiento académico pleno, ya que Cambridge permitía a las mujeres asistir a clases, pero no les otorgaba títulos oficiales. Aquella contradicción resume bien el clima intelectual de la época: las mujeres podían aprender, incluso destacar, pero no eran consideradas iguales dentro de la institución universitaria.

Uno de los momentos decisivos de su juventud fue asistir a una conferencia de Arthur Eddington sobre la expedición de 1919 que confirmó con observaciones la teoría de la relatividad general de Einstein. Aquella intervención despertó en ella un interés definitivo por la astronomía. Cecilia comprendió pronto que, si quería desarrollar una carrera científica en este campo, tendría que buscar oportunidades fuera del Reino Unido. En 1923 viajó a Estados Unidos gracias a una beca para incorporarse al Observatorio de Harvard College, dirigido entonces por Harlow Shapley. Ese traslado fue crucial: en Harvard encontró el entorno en el que pudo realizar el trabajo que cambiaría para siempre la astrofísica.

En el Observatorio de Harvard, Payne se incorporó a una tradición científica en la que habían trabajado numerosas mujeres conocidas como las *«Harvard Computers»*, investigadoras que analizaron durante décadas miles de placas fotográficas estelares y contribuyeron decisivamente al desarrollo de la astronomía moderna. En ese contexto, Cecilia Payne combinó un conocimiento extraordinario de la física con una enorme capacidad de análisis.

Aplicando las teorías más recientes de la física atómica —en particular, la teoría de la ionización de Meghnad Saha— logró interpretar de una manera nueva los espectros estelares. La luz de las estrellas, al descomponerse, revela una serie de líneas que permiten identificar los elementos químicos presentes en sus atmósferas; hasta entonces, se pensaba que la composición de las estrellas debía de ser similar a la de la Tierra. Payne demostró que esa idea era errónea.

En 1925 defendió su tesis doctoral, *Stellar Atmospheres*, considerada posteriormente por el astrónomo Otto Struve como «la tesis doctoral más brillante jamás escrita en astronomía». En ella establecía que el hidrógeno era, con enorme diferencia, el elemento más abundante en las estrellas, acompañado por el helio en proporciones también muy elevadas. La conclusión era revolucionaria porque modificaba la imagen aceptada del cosmos: la materia dominante en el universo no era la misma que define la composición de nuestro planeta. Dicho de otro modo, Payne mostró que las estrellas no eran químicamente una prolongación de la Tierra, sino objetos regidos por una lógica física propia y por una composición radicalmente distinta a la que entonces se suponía.

La trascendencia de esta aportación fue inmensa. No se trataba únicamente de identificar unos componentes químicos, sino de inaugurar una nueva comprensión de la estructura material del universo. Gracias a ese descubrimiento, la astronomía pudo avanzar hacia modelos más precisos sobre la evolución estelar, la formación de galaxias y la abundancia cósmica de los elementos. Lo que hoy puede parecer un dato elemental en cualquier manual —que el hidrógeno es el elemento más abundante del universo— fue, en realidad, el resultado de una ruptura intelectual de gran alcance, impulsada por la lucidez de una joven científica de apenas veinticinco años.

Sin embargo, como sucede con frecuencia en la historia de las mujeres en la ciencia, el mérito no fue reconocido de inmediato. Sus conclusiones fueron cuestionadas porque contradecían las creencias dominantes. El prestigioso astrónomo Henry Norris Russell le aconsejó moderar su afirmación y presentar sus resultados con cautela, considerando que una abundancia tan extraordinaria de hidrógeno parecía «claramente imposible». Cecilia, temiendo que su tesis no fuese aceptada, introdujo una reserva en sus conclusiones. Años más tarde, el propio Russell obtuvo resultados coincidentes por otros métodos y reconoció que Payne había tenido razón desde el principio. Este episodio ilustra con claridad una dinámica demasiado habitual: la verdad científica estaba ya en su trabajo, pero la autoridad institucional y el sesgo de género retrasaron su aceptación.

Su carrera posterior en Harvard estuvo también marcada por esas desigualdades. Durante años trabajó sin un

ISSN 1988-5318

puesto plenamente reconocido, con funciones docentes e investigadoras que no siempre figuraban oficialmente y con condiciones laborales inferiores a las de sus colegas varones. Sus cursos ni siquiera aparecieron en el catálogo de la universidad hasta 1945, a pesar de que ya enseñaba y dirigía investigación.

Durante un tiempo, su salario fue clasificado administrativamente como si formara parte del «equipamiento», una muestra tan simbólica como hiriente de la escasa consideración institucional que recibió. Solo en 1956 se convirtió en la primera mujer nombrada profesora titular en la *Facultad de Artes y Ciencias* de Harvard, y poco después pasó a ser también la primera mujer en dirigir un departamento en esa universidad.

Reducir su legado al descubrimiento de la composición de las estrellas sería, además, injusto. Cecilia Payne–Gaposchkin desarrolló una obra científica de gran amplitud. Investigó la estructura de la Vía Láctea, estudió estrellas de alta luminosidad y realizó, junto con Sergei Gaposchkin —astrónomo y compañero de vida, con quien se casó en 1934—, un extenso trabajo sobre estrellas variables.

Entre ambos impulsaron campañas observacionales inmensas, con millones de registros, que contribuyeron de manera decisiva al conocimiento de la evolución estelar y de sistemas como las *Nubes de Magallanes*. Publicó, además, libros fundamentales como *The Stars of High Luminosity* (1930), *Variable Stars* (1938) y *Variable Stars and Galactic Structure* (1954), consolidando una trayectoria científica sostenida y de enorme productividad.

Su figura posee también una dimensión humana especialmente valiosa. Payne–Gaposchkin fue descrita por su familia como una lectora voraz, una mujer creativa y una personalidad intelectualmente indomable. Ella misma se definió como «una rebelde contra el rol femenino» y dejó claro que su verdadera rebelión consistía en no aceptar ser pensada ni tratada como inferior. Esa afirmación resume bien el significado más profundo de su biografía. Cecilia no solo desafió una hipótesis astronómica equivocada; desafió también un sistema académico y cultural que pretendía limitar las ambiciones intelectuales de las mujeres.

Su historia encarna de forma ejemplar dos valores esenciales de la vida académica: el compromiso con la verdad y la perseverancia frente a la adversidad. Su obra demuestra que la ciencia no avanza únicamente por acumulación de datos, sino también gracias a la valentía de quienes sostienen una evidencia incluso cuando el contexto les es hostil. Recordarla hoy es hacer justicia histórica, pero también ofrecer a las nuevas generaciones una referencia imprescindible sobre lo que significa investigar con rigor, independencia y confianza en el propio trabajo.

En 1976 recibió el *Premio Henry Norris Russell* de la *Sociedad Astronómica Estadounidense*. En esa ocasión pronunció unas palabras que condensan admirablemente el sentido de toda una vida dedicada a la investigación: *«La recompensa del joven científico es la emoción de ser la primera persona en la historia del mundo en ver o entender algo. Nada se puede comparar con esa experiencia. [...] La recompensa del viejo científico es la sensación de haber visto un vago esbozo convertirse en un paisaje magistral»*. Pocas citas expresan tan bien la mezcla de pasión, paciencia y perspectiva que define la mejor ciencia.

Cecilia Payne–Gaposchkin falleció en 1979, tras una vida dedicada a la investigación y al estudio de las estrellas. Su trayectoria dejó una huella profunda en la astronomía del siglo XX y abrió camino a nuevas generaciones de científicas. Recordarla hoy es reconocer la magnitud de una aportación científica que tardó demasiado tiempo en recibir el lugar que merecía.

Referencias

[1] Cecilia Payne–Gaposchkin, la autora de «la tesis doctoral más brillante jamás escrita en astronomía» [7].

[2] Cecilia Payne–Gaposchkin, la mujer que descubrió de que están hechas las estrellas (y desafió el machismo en la ciencia) [8].

[3] Cecilia Payne–Gaposchkin: «La astrónoma que descubrió la composición de las estrellas» [9].

[4] Cecilia Payne–Gaposchkin (1900–1979) [10].

■

[7] *mujeresconciencia.com/2023/07/12/cecilia-payne-gaposchkin-la-autora-de-la-tesis-doctoral-mas-brillante-jamas-escrita-en-astronomi*.
[8] *www.bbc.com/mundo/noticias-47896442*.
[9] *mujeresconciencia.com/2017/04/12/cecilia-payne-gaposchkin-la-astronoma-descubrio-la-composicion-las-estrellas*.
[10] *mujeresbacanas.com/cecilia-payne-gaposchkin-1900-1979-su-tesis-de*.

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

La serie geométrica

A través del espejo

Antonio García Jerez
Universidad de Almería

Una progresión geométrica es la sucesión que se obtiene multiplicando repetidamente una cantidad a (el primer término) por otro número fijo r al que llamamos razón. Probablemente ya haya estudiado que se puede encontrar, con poco esfuerzo, una expresión sencilla para la suma de los n primeros términos de esta serie:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r},$$

pero quizás lo más interesante de este resultado es que, si $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos converge, tendiendo concretamente a:

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + \cdots = a\frac{1}{1-r}, \quad (|r| < 1).$$

Las series geométricas aparecen en diversos campos del conocimiento, tanto en Ciencias Sociales como en Ciencias Experimentales. Podemos encontrar aplicaciones en Finanzas, Epidemiología o Neurociencia, y también en Física, especialmente en contextos de propagación de ondas (e.g. en Óptica, Electromagnetismo, Acústica, Sismología o Física de la Atmósfera). El objetivo de este escrito es mostrar algunas aplicaciones de esta fórmula en situaciones físicas de la vida cotidiana. Pero empecemos con un curioso ejemplo, al límite entre la Filosofía y la Cinemática.

Persiguiendo a la tortuga

La llamada *paradoja de Aquiles y la tortuga*, supuestamente planteada por el filósofo de la antigua Grecia Zenón de Elea (490–430 a. C.), nos propone que Aquiles va a enfrentarse en una carrera a una tortuga a la que deja una cierta distancia de ventaja d_1.

Si ambos comienzan a correr a velocidades constantes v_A y v_T, Aquiles, que va más rápido, necesita emplear un cierto tiempo ($t_1 = d_1/v_A$) en alcanzar la posición inicial de la tortuga (el punto P_1). Una vez allí, encontrará que la tortuga ha avanzado hasta otro punto P_2 que está a distancia d_2 de P_1, por lo que tendrá que dedicar un tiempo adicional $t_2 = d_2/v_A$ en llegar a P_2, y así una y otra vez.

Aquiles no alcanzará nunca a la Tortuga, ya que cada vez que llega a algún lugar donde ésta ha estado, todavía tiene que recorrer alguna distancia más para alcanzarla... ¿o sí?

El fallo en la argumentación está en admitir que esta serie infinita de etapas en que se ha descompuesto la captura de la tortuga requiere de un tiempo infinito para completarse. No es así, los tiempos que vamos añadiendo forman una serie geométrica convergente, y el animal es alcanzado en un tiempo finito $d_1/(v_A - v_T)$.

La canica que cae al suelo

Dejemos caer una canica desde una altura h_1 sometida a la gravedad g. Tras ciertas simplificaciones, deducimos la bola describirá movimientos rectilíneos uniformemente acelerados (o desacelerados), excepto en los momentos en que impacta con el suelo, llegando por primera vez a este con velocidad $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ en un tiempo $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 2h_1/v_1$.

Justo tras el choque, la canica adquiere una velocidad $v_2 = ev_1$, hacia arriba, siendo $0 \le e \le 1$ el llamado *coeficiente de restitución*, que depende de las formas y materiales que componen los cuerpos implicados.

Con esta nueva velocidad v_2, la canica solo puede subir hasta una altura $h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = e^2h_1$, invirtiendo un tiempo $t_2 = \frac{2h_2}{v_2} = et_1$. A partir de ahí, el proceso vuelve a empezar. Si sumamos sobre todos los trayectos, el tiempo total durante el cual la canica se está moviendo es:

$$\begin{aligned} T &= t_1 + 2et_1 + 2e^2t_1 + 2e^3t_1 + \ldots \\ &= 2t_1(1 + e + e^2 + e^3 + \ldots) - t_1 \\ &= t_1\left(\frac{2}{1-e} - 1\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right). \end{aligned}$$

Los factores 2 que aparecen en todos los términos de la serie, excepto en el primero, se deben a que la canica tiene que subir y bajar entre un rebote y el siguiente.

Si $e = 0$, el choque se dice «totalmente inelástico» y no habrá ningún rebote, parándose la bola tras la primera caída.

En el caso idealizado $e = 1$, el choque se dice «elástico» y la serie no es convergente (la canica quedaría eternamente rebotando, sin perder altura, para desesperación del vecino de abajo).

También podemos calcular la distancia total recorrida, D, sumando ahora una serie geométrica con razón e^2:

$$\begin{aligned} D &= h_1 + 2e^2h_1 + 2e^4h_1 + \ldots \\ &= 2h_1(1 + e^2 + e^4 + \ldots) - h_1 \\ &= h_1\left(\frac{2}{1-e^2} - 1\right). \end{aligned}$$

Radiación difusa en la atmósfera

Si miráramos el cielo diurno desde la Luna, nos sorprendería que es muy oscuro salvo, por supuesto, en la dirección del Sol. La luminosidad del cielo terrestre responde a varios mecanismos. Las contribuciones principales se deben a la radiación solar que nos llega tras ser dispersada por las moléculas del aire o por partículas de mayor tamaño (aerosoles), pero otra contribución no despreciable

 ISSN 1988-5318

es la radiación que es reflejada por el suelo y después por la atmósfera, quizá varias veces.

Podemos estimar este término partiendo los albedos (reflectividades) del suelo y de la atmósfera, ρ_s y ρ_a, menores que 1, que representan la proporción de energía lumínica que es reflejada por dichas estructuras.

Si Q representa la energía por unidad de tiempo, superficie y longitud de onda que alcanza el suelo tras atravesar una sola vez la atmósfera, $Q\rho_s$ medirá la radiación difusa ascendente tras la primera reflexión por el suelo, la cual se reflejará parcialmente en la atmósfera, resultando una cantidad $Q\rho_s\rho_a$ de vuelta hacia el suelo.

Las reflexiones continúan, añadiendo contribuciones cada vez menores, de modo que el total de radiación reflejada que alcanza el suelo suma la *irradiancia difusa* por *reflexión múltiple*:

$$I_{dm} = Q(\rho_s\rho_a + \rho_s^2\rho_a^2 + \rho_s^3\rho_a^3 + \dots) = Q\frac{\rho_s\rho_a}{1-\rho_s\rho_a},$$

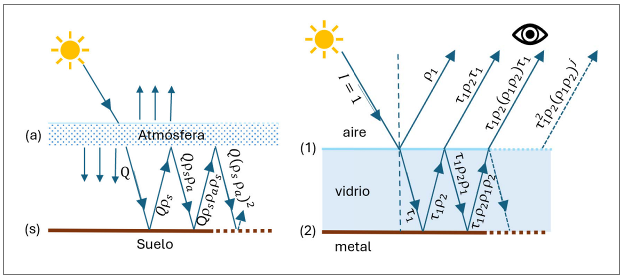
que se puede añadir a las componentes de dispersión atmosférica mencionadas antes para obtener la irradiancia difusa total.

Reflectividad del espejo

Consideremos finalmente un espejo compuesto por una lámina de vidrio sobre una fina capa metálica. Podemos llamar ρ_1 y τ_1 a la reflectividad y transmisividad de la interfaz aire–vidrio ($\rho_1 + \tau_1 = 1$) y utilizar el subíndice 2 para la vidrio-metal.

Si la luz incide perpendicularmente, estos factores sólo dependen de los índices de refracción de los materiales; tampoco dependen del sentido de propagación. Las expresiones de las intensidades de los rayos que abandonan el espejo, para una intensidad incidente unitaria, se muestran en la figura. La reflectividad total o efectiva de este se obtiene, por tanto, sumando la serie geométrica de razón $\rho_1\rho_2$:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{total}} &= \rho_1 + \tau_1^2\rho_2 + \tau_1^2\rho_2(\rho_1\rho_2) + \tau_1^2\rho_2(\rho_1\rho_2)^2 + \dots\\ &= \rho_1 + \frac{\tau_1^2\rho_2}{1-\rho_1\rho_2}.\end{aligned}$$



En realidad, si la lámina transparente es delgada (en términos de longitudes de onda) y homogénea, las interferencias constructivas o destructivas entre las ondas electromagnéticas reflejadas al aire tras recorrer distintos caminos juegan un papel relevante, acentuando unas longitudes de onda en detrimento de otras. Este fenómeno es el responsable de los patrones coloridos (iridiscencia) que pueden observarse a veces en láminas de aceite o en las pompas de jabón. En estos casos, el espesor de la lámina transparente (aceite, agua jabonosa,...) será una magnitud a considerar, ya que los desfases (o «retrasos») entre las ondas que la han atravesado distinto número de veces determinan las condiciones de interferencia. ■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Fracciones egipcias

Matemáticas en tiempos de los faraones

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Existe un amplio consenso entre los historiadores occidentales de las matemáticas de que se puede establecer el inicio de la matemática tal y como la conocemos hoy en día, con sus axiomas, definiciones y teoremas, en la Grecia clásica. Eso no quiere decir que no se hicieran matemáticas en periodos anteriores aunque su enfoque fuera diferente, más utilitario.

En este artículo vamos a ver algunos aspectos de las matemáticas que se realizaban en el Antiguo Egipto en la época de los faraones.

El tema es muy amplio, imposible de tratar profusamente en una reseña de estas dimensiones. Nos vamos a centrar en un aspecto muy concreto: cómo se representaban los repartos en dicha época, es decir, el estudio de las fracciones.

Uno de los problemas más importantes que se planteaba a la administración en esta época era la forma justa de repartir en diferentes situaciones, como en el caso de una herencia o la división de fincas después de las crecidas periódicas del Nilo.

La información que nos ha llegado hasta hoy sobre las matemáticas que se realizaban en el Antiguo Egipto no es demasiado amplia, aunque se han encontrado documentos muy relevantes al respecto.

Los escribas egipcios utilizaban como elemento base de la escritura el papiro, material extremadamente frágil que difícilmente resiste malas condiciones climatológicas —calor, humedad, etc.—, lo que hace que se deteriore con facilidad, por lo que hasta nuestros días han llegado pocos documentos de este tipo y solo algunos de ellos contienen información que nos pueda mostrar el conocimiento matemático del momento.

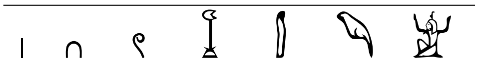
Uno de esos documentos es el *papiro de Ahmes*, también conocido como el *papiro de Rhind*, en honor a *Ale-*

 ISSN 1988-5318

xander Henry Rhind*, que lo adquirió en 1858. Este papiro, redactado en *escritura hierática*, contiene 87 problemas matemáticos y se supone que era una especie de «libro de texto» para enseñar procedimientos matemáticos a otros escribas. En él aparecen soluciones a problemas de repartos, áreas, volúmenes, etc.

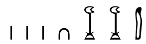
El sistema de numeración egipcio, al igual que el romano o el griego, era aditivo, no posicional como el que actualmente usamos, por lo que la representación de las cantidades se realizaba agrupando símbolos. Por ejemplo, en el sistema de escritura hierático, las potencias de 10 se representaban por los siguientes símbolos:

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6



Para escribir cualquier número se utilizaban agrupaciones de estos símbolos. Si queremos escribir la cantidad 12013, los egipcios la expresaban —empezando por las unidades— como:

$$3 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4 =$$



En este caso, la operación de suma también se realizaba por agrupación de símbolos.

Pero, ¿cómo se realizaba la multiplicación de dos números?

Para esta tarea, los egipcios utilizaban el *método de la duplicación* (ver [2, 3, 4]).

Supongamos [11] que queremos multiplicar 17 por 13. Para realizar esta operación construimos la siguiente tabla con dos columnas:

1	**17**
2	34
4	**68**
8	**136**

Los elementos de la columna de la izquierda en **rojo** suman $1 + 4 + 8 = 13$ y los elementos asociados a estos números en la columna de la derecha, en **azul**, suman $17 + 68 + 136 = 221$ que, como se puede comprobar, es el resultado de la operación 13×17.

Los egipcios sabían que podían representar cualquier número como potencias [12] de 2 y que este procedimiento permitía realizar la operación de multiplicación solamente sabiendo duplicar valores. ¿Sabrías decirnos qué propiedad hace que este método de multiplicación funcione correctamente?

Para realizar la división, se utilizaba la misma técnica en sentido inverso. Se puede ver un ejemplo en [2, 4].

Este método funciona bien y de forma sencilla si la división es exacta pero, ¿qué ocurre si el resto no es cero?

En este caso aparece la necesidad de utilizar fracciones. Veámoslo con un ejemplo [2]. Queremos dividir 16 entre 3. Apliquemos el método de la duplicación:

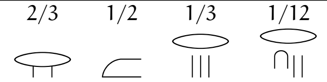
1	**3**
2	6
4	**12**
2/3	2
1/3	**1**

Como se puede observar $3 + 12 = 15$, nos falta una unidad para llegar a 16, entonces el escriba empieza por 2/3 asignando el 2, cuya mitad es 1/3, al que le asignamos el 1 y ya tenemos la cantidad para completar hasta 16, por lo que el resultado de la división es $5\frac{1}{3}$.

Y aquí viene un hecho importante, salvo la fracción 2/3, los egipcios solamente manejaban *fracciones unitarias*, es decir, fracciones con el numerador 1. Para repartos con numerador diferente de la unidad, expresaban dichas fracciones como suma de fracciones unitarias diferentes. Por ejemplo, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}$.

La representación hierática de algunas fracciones se puede ver en la siguiente tabla:

2/3	1/2	1/3	1/12



Como hemos visto, el proceso de multiplicación y división se basa en duplicaciones. En el caso de las fracciones unitarias, si el denominador es par, el proceso es fácil, sin embargo, en el caso de denominadores impares, puede ser algo más complicado.

Para facilitar esta tarea, en el papiro de Ahmes aparece una tabla con la representación en fracciones unitarias de 55 fracciones del tipo $2/n$ para los valores impares de n hasta el 101 [13].

La pregunta que surge ahora es si es posible representar cualquier fracción mediante sumas de fracciones unitarias diferentes. La respuesta es afirmativa y a dicha suma se le denomina *fracción egipcia*.

A partir de esta afirmación surgen multitud de cuestiones dignas de investigación —algunas de ellas no resueltas a día de hoy—. La primera cuestión que se nos presenta es el cálculo de descomposición de una fracción arbitraria como suma de fracciones unitarias diferentes.

En [1] se presentan diez algoritmos diferentes para encontrar fracciones egipcias con su correspondiente implementación en *Mathematica*.

Veamos alguno de ellos: el algoritmo *greedy* o *voraz* de Sylvester, que funciona de la siguiente manera:

- Encontrar la fracción unitaria menor más cercana a m/n. Esto se puede hacer dividiendo n entre m.
- Si no hay resto, hemos terminado.
- Si hay resto, restamos la fracción unitaria a m/n y volvemos al paso primero hasta que tengamos una fracción unitaria.

[11] Vamos a utilizar la notación actual para simplificar la exposición. Se podría trasladar a la notación hierática de forma sencilla.
[12] Representación de un número en el sistema binario, que los egipcios desconocían como tal.
[13] Para una descripción más detallada del proceso de multiplicación de fracciones se puede consultar [2], páginas 95–99.

Veámoslo con un ejemplo. Calculemos la fracción egipcia de $\frac{5}{11}$:

- Hacemos $\frac{11}{5} = 2$, que tiene resto, por lo que la primera fracción unitaria es $\frac{1}{3}$.
- Ahora hacemos la resta $\frac{5}{11} - \frac{1}{3} = \frac{4}{33}$.
- Repetimos el paso primero: $\frac{33}{4} = 8$, que tiene resto, por lo que la siguiente fracción unitaria es $\frac{1}{9}$.
- Hacemos $\frac{4}{33} - \frac{1}{9} = \frac{1}{99}$, que ya es unitaria, por lo que hemos acabado.

Así pues,

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

Este algoritmo produce siempre una solución, pero no necesariamente la más corta ni la más sencilla. Se puede demostrar que una fracción cuyo numerador sea m se puede escribir, como máximo, como suma de m fracciones unitarias.

Para comprobar que el algoritmo voraz no siempre produce la solución más simple, tenemos que para 19/20 este método construye la fracción egipcia:

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.$$

Sin embargo, se puede comprobar que la siguiente representación es más sencilla y más corta:

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

Aunque han pasado más de 3000 años, el estudio de la fracciones egipcias no ha finalizado, quedan muchos aspectos por investigar. Por ejemplo, podemos citar la conjetura de Erdős–Straus en la que establece que, para todo $n \geq 2$, existe tres enteros positivos x, y, z de tal forma que se cumple que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

A día de hoy sigue siendo una afirmación que está por demostrar.

Esto solo es una pequeña muestra de que en matemáticas todavía quedan muchas cosas por hacer.

Referencias

[1] Eppstein, D. (1995) Ten algorithms for egyptians fractions. *Mathematica in Educations and Research.* Volume 4, number 2 [14].

[2] Gheverghese, G. (2011) *The crest of the peacock. Non–European roots of Mathematics.* Third edition. Princeton [15].

[3] Gillings, R. J. (1972) *Mathematics in the time of the pharaohs.* Dover.

[4] Ibáñez, R. (2019) *Los secretos de la multiplicación. De los babilonios a los ordenadores.* Catarata.

■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Curvas mágicas

Sergio Belmonte
Miembro de la Junta directiva del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

Os quiero explicar un pequeño efecto de magia basado en una rama de las matemáticas que, a priori, no se relacionaría con la magia: la teoría de grafos. Solamente necesitas papel y lápiz para poder presentarlo. Dile a un espectador que realice lo siguiente, en secreto, sin enseñarte nada (es importante que entienda y siga muy bien las instrucciones):

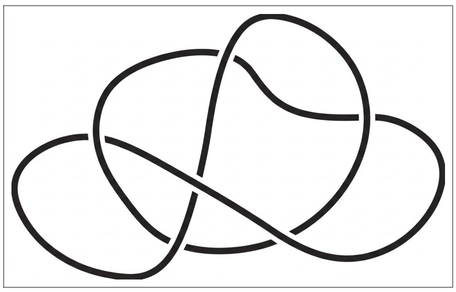


Figura 1

1. Que dibuje (sin separar el lápiz del papel) una curva cualquiera cerrada y que se corte a sí misma las veces que quiera (por ejemplo, Figura 1)
2. Que etiquete con letras los puntos de corte como quiera (Figura 2).

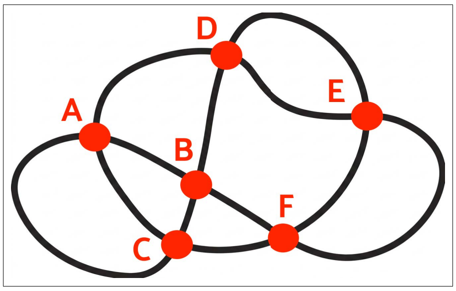


Figura 2

3. Que elija un punto cualquiera (por ejemplo, el «A»), una dirección cualquiera (Figura 3), y vaya avanzando hasta recorrer toda la curva y volver al punto de partida, anotando los puntos por los que pasa.

[14] Notebook de *Mathematica* disponible en *www.wolframcloud.com/objects/nbarch/2018/10/2018-10-10pt4o2/Egyptian.nb*.
[15] Existe una traducción al castellano que está disponible en la *biblioteca de la UAL*.

 ISSN 1988-5318

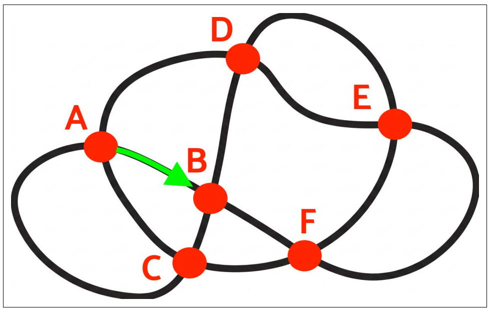


Figura 3

En nuestro ejemplo, la secuencia de letras por donde se pasa es la siguiente: ABFEDACFEDBC.

4. Ahora dile que elija un par de letras adyacentes (es decir, que estén juntas) y las intercambie. Por ejemplo, que coja el par «DB» y le dé la vuelta, resultando «BD».

5. Hasta aquí el espectador lo ha hecho todo en secreto. Por último, dile que te enseñe la secuencia de letras que le ha quedado. En nuestro ejemplo quedaría: ABFEDACFE<u>BD</u>C.

6. Sin más información que esa, anuncia que serás capaz de adivinar qué dos letras ha intercambiado.

Para ello realiza (en secreto) lo siguiente: separa la secuencia de letras en dos subsecuencias, separando las posiciones impares de las pares, de esta forma:

- Letras en posiciones Impares: A_F_D_C_E_D_
- Letras en posiciones Pares: _B_E_A_F_B_C

Pues resulta que las únicas letras que se repiten en cada subsecuencia, son exactamente las que intercambió el espectador. En nuestro ejemplo, la D y la B. ¿No es sorprendente?

EXPLICACIÓN MATEMÁTICA

En cualquier curva cerrada que se dibuje, si os fijáis, los puntos de intersección tienen dos líneas de entrada y dos de salida (se dice que tienen grado 4). Así pues, al recorrer toda la curva, siempre se pasará por cada punto exactamente 2 veces.

Lo curioso (y lo que hace que el efecto funcione) es que siempre se pasa por los puntos en paridad diferente. Es decir, si por un punto se pasa en posición par, la siguiente vez que se pase por él será en posición impar o viceversa. Tomando el dibujo del ejemplo anterior, por el punto «F» se pasa en tercer lugar (impar), y después en octavo lugar (par). Sus posiciones tienen diferente paridad. Y esto ocurre con todos los nodos del grafo (letras).

Gracias a esta propiedad, en la secuencia inicial, separando las posiciones pares e impares de las letras, nunca se repetirá ninguna y aparecerán todas las letras en las dos subsecuencias una sola vez. Siguiendo con el ejemplo anterior, si recorremos todo el grafo, obtendríamos la secuencia ABFEDACFEDBC

- Letras en posiciones Impares: A_F_D_C_E_B_
- Letras en posiciones Pares: _B_E_A_F_D_C

De esta manera, cuando el espectador intercambie dos letras adyacentes, estas serán las únicas que se repetirán en cada subsecuencia. Tan sencillo como genial, ¿no os parece?

Realmente en el efecto, lo que le pedimos al espectador, es que dibuje un *ciclo euleriano* en la curva, es decir, recorrer todo el dibujo sin pasar dos veces por el mismo sitio y sin separar el lápiz del papel. Y gracias a como está dibujado, siempre se puede realizar. Supongo que todos recordáis algún pasatiempo de este tipo, ¿verdad? Y si miramos una curva cerrada como un grafo, entonces sería un grafo cerrado, conexo y plano 4–regular (cada vértice tiene grado 4, es decir, 4 aristas), y para este grafo, se cumpliría la Fórmula de Euler:

$$\text{Regiones} + \text{Intersecciones} - \text{Segmentos} = 2.$$

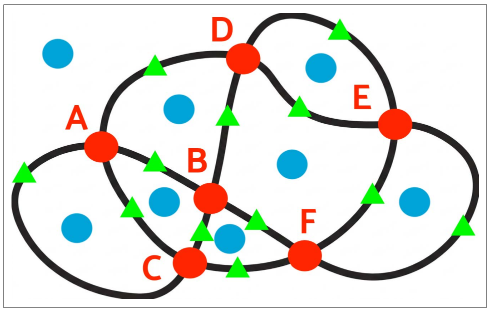


Figura 4

En nuestro ejemplo (Figura 4) tenemos:

- Regiones (azul) = 8.
- Intersecciones (rojo) = 6.
- Segmentos (verde) = 12.

...Que también es un poco mágico, ¿verdad?

Referencias

[1] Euler, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.*

[2] West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall.

[3] Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery.* Dover.

■

ISSN 1988-5318

Microrrelatos matemáticos

Por eso fue

José Ramón Sánchez García
IES Los Ángeles (Almería)

En su clase de arrebatados ignorantes, el joven Aristocles se desesperaba una y otra vez con sus compañeros. No solamente presumían de vasta incultura, sino que además se mofaban de él por su cuerpo grande y destartalado. El colmo llegó el día en que, mientras él contemplaba absorto al profesor Crátilo dibujando los cinco poliedros regulares sobre la arena, sus compañeros cogieron otros cinco pedruscos para hacer diana sobre su cuerpo; ciego de ira, en ese momento sintió que quería alejarse para siempre de esos malnacidos.

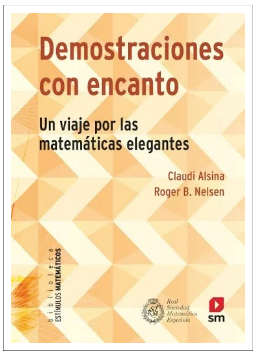
Por sus anchas espaldas y su físico, Aristocles fue apodado Platón (de πλατύς, «ancho»), sobrenombre por el que lo conocería el mundo entero a partir de entonces. Cuando fundó su Academia, tuvo claro a quiénes iba a vetar el paso, y así lo dejó anunciado en el frontispicio.

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Demostraciones con encanto.

Un viaje por las matemáticas elegantes.

Claudi Alsina y Roger B. Nelsen



Ficha Técnica
Editorial: SM.
291 páginas.
ISBN: 978-84-131-8779-2.
Año: 2018.

El pasado mes de noviembre recibimos la triste noticia del fallecimiento de Claudi Alsina. En el mundo matemático Claudi Alsina no necesita presentación. Catedrático de la *Universidad Politécnica de Cataluña*, jubilado desde 2016, dedicó una parte muy importante de su vida a la divulgación matemática. Investigador notable en el ámbito de las ecuaciones funcionales o de la lógica difusa, fue también un gran experto en la obra de Gaudí, publicando recientemente un libro editado por la *American Mathematical Society* titulado *The genius of Gaudí. Geometry and Architecture* en colaboración con Roger B. Nelsen.

Prescisamente, Nelsen es el coautor del texto que vamos a reseñar, como homenaje a Claudi Alsina, en este número del Boletín.

Podríamos haber elegido cualquiera de las múltiples obras de divilgación que Alsina publicó: *Mateschef*, *Los matemáticos serios son los que no se ríen nunca*, *Vitaminas matemáticas* o *Geometría para turistas* —la lista sería interminable—, pero hemos decidido elegir un texto, quizás algo menos conocido para el gran público, pero de una belleza extraordinaria: *Demostraciones con encanto*, cuyo subtítulo lo dice todo, *Un viaje por las matemáticas elegantes*.

Publicado por la editorial *SM* en la colección *Biblioteca de estímulos matemáticos*, este libro es de esos textos que toda persona amante de las matemáticas debería incluir en su biblioteca.

Los autores han recogido un amplio abanico de resultados —algunos muy conocidos, otros no tanto— cuyo denominador común es que sus demostraciones tienen «algo especial», son originales, bellas o ingeniosas.

El libro consta de 12 capítulos en los que se abordan, esencialmente, problemas geométricos y de teoría de números. El planteamiento es brillante. Se contextualiza el resultado, se plantea y se presenta su demostración detallada.

Hay que hacer notar que no es necesario tener una alta formación matemática para disfrutar de esta obra. Un conocimiento de cálculo infinitesimal básico a nivel de bachillerato es más que suficiente. Eso sí, no se trata de un texto divulgativo al uso, es un libro **DE** matemáticas, en los que detenerse en cada una de las demostraciones será un deleite para todo aquel que ame esta disciplina.

Por ejemplo, se presentan varias demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ diferentes de la usual o de la irracionalidad de π sin la necesidad de herramientas matemáticas de alto nivel.

Para complementar el texto, los autores proponen al final de cada capítulo desafíos para que los lectores interesados satisfagan su curiosidad matemática.

En definitiva, un libro excelente a la altura de dos maravillosos matemáticos. ¡Muchas gracias, Claudi por transmitirnos tu pasión por las matemáticas!

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

 ISSN 1988-5318

Acertijos

La dilatación del tiempo

Los principios de la teoría de la relatividad de Albert Einstein tienen consecuencias que desafían la intuición.

El tiempo, para un individuo M que se desplace a cierta velocidad v con respecto a otro individuo R, que podemos considerar en reposo, no transcurre del mismo modo que para este último. De hecho, un fenómeno que para M se produzca en t_M segundos ocurrirá en t_R segundos para R. La siguiente igualdad expresa la relación entre las medidas del tiempo realizadas por M y R:

$$t_M = t_R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

La letra c designa la velocidad de la luz en el vacío (una constante universal, como nos dice uno de los principios aludidos, aproximadamente igual a 300 000 km/s).

Supongamos que M se desplaza a velocidad constante $v = 0{,}99c$ (el 99 por ciento de la velocidad de la luz) hacia la estrella *Próxima centauri*, situada a unos 4,25 años luz de la tierra. Nos gustaría saber:

1. ¿Cuánto tiempo tardaría M, según R, en alcanzar la estrella?
2. ¿Cuánto tardaría M, según su propia medición del tiempo, en llegar a *Próxima centauri*?
3. ¿Qué distancia habría recorrido M según sus propias mediciones? (las distancias también son relativas).

(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

Comenzaba la propuesta recordándonos que $4+4=8$, pero se nos pedía el análisis de la identidad $8+8=4$.

Por supuesto, esta última igualdad es incorrecta si la interpretamos en el marco de los números enteros.

En cambio, si identificamos cada uno de tales números con el resto que resulta al dividirlo entre 12, obtenemos un conjunto de 12 elementos, $0, 1, 2, \ldots, 11$, habitualmente denotado por $\mathbb{Z}_{12}$, en el que se puede sumar y multiplicar usando la identificación mencionada.

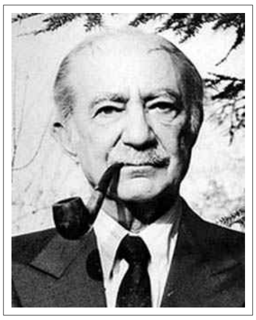
Así, por ejemplo, $7+5=0$, pues 12 se identifica con 0 (que es el resto obtenido al dividir 12 entre 12). Obsérvese también que $7\times 5 = 11$ (si dividimos 35 entre 12 el resto es 11). Del mismo modo, $8+8=4$ (el resto de dividir 16 entre 12).

La identidad que estamos discutiendo es por tanto válida en $\mathbb{Z}_{12}$. Los relojes (de manecillas) responden perfectamente a la aritmética de este conjunto. Si sumamos 8 horas a partir de las 8 de la mañana llegamos a las 4 de la tarde.

Juan Carlos Navarro Pascual
Universidad de Almería

Citas Matemáticas

«Dios existe porque las matemáticas son consistentes, y el diablo existe porque no podemos demostrar esa consistencia».



Morris Kline (1908–1992), matemático estadounidense, especializado en la historia de las matemáticas.

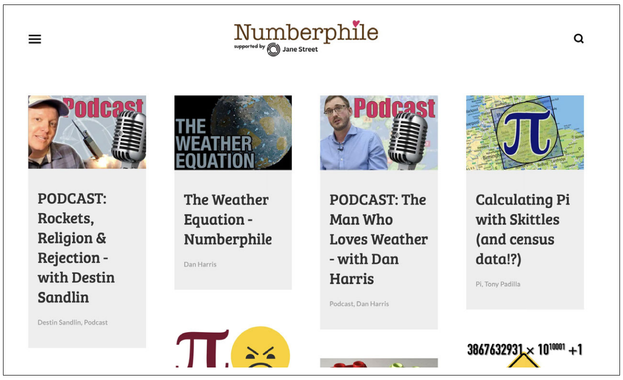
«He decidido abandonar la geometría abstracta, es decir, la consideración de cuestiones que sólo sirven para ejercitar la mente, para estudiar otro tipo de geometría que tiene por objeto la explicación de los fenómenos de la naturaleza».

René Descartes (1596–1650), matemático y filósofo francés.

ISSN 1988-5318

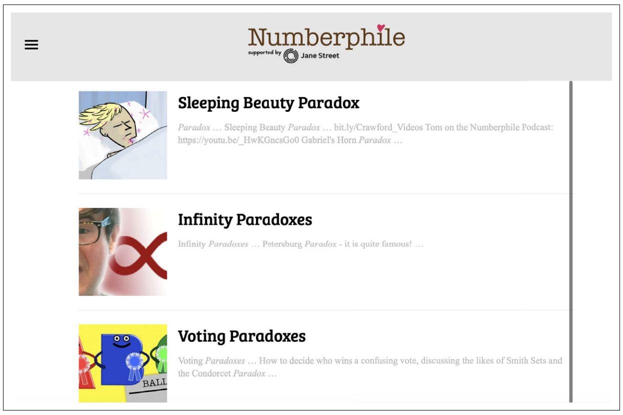
Páginas web y redes sociales

Numberphile



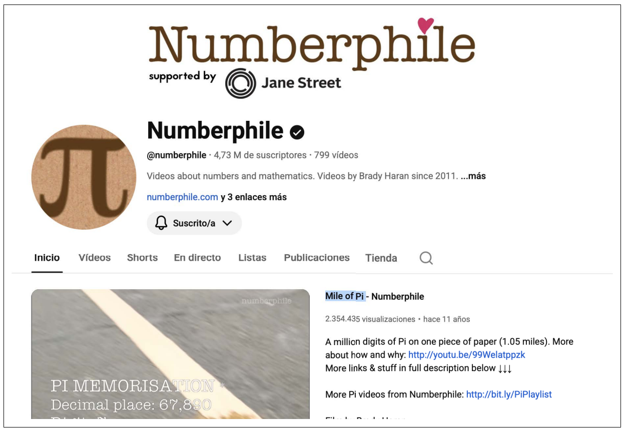
Página principal de **Numberphile**

Numberphile (*www.numberphile.com*), desarrollado por el videoperiodista Brady Haran, es uno de los referentes actuales en divulgación matemática en internet. A través de la producción de vídeos de corta duración se aproxima a diversos conceptos y problemas matemáticos, desde lo más irrelevante hasta problemas realmente trascendentes y de actualidad en investigación. Además cuenta con un podcast que contiene entrevistas más extensas.



Cuenta con la colaboración de reconocidos matemáticos y otros invitados de todo el mundo. Entre los colaboradores podemos encontrar a Charles Fefferman, Cédric Villani, Terence Tao, Ernő Rubik, Roger Penrose o Donald Knuth.

Su canal de YouTube @numberphile cuenta con más de 4,73 millones de suscriptores y 799 vídeos. *Mile of Pi* es un vídeo que cuenta con más de 2 millones de visualizaciones donde se muestran un millón de decimales de π en una sola pieza de papel de una milla de largo extendida en un aeropuerto.



En definitiva, se trata de una forma extraordinaria de aproximar el mundo matemático al gran público, despertando su curiosidad y fascinación.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Matemáticas y música

Iván José Acién Martín
Juan Francisco Cuevas Rodríguez
Rocío Guillén Manzano
Juan Rafael Sánchez Gálvez
Carmen Torres Gutiérrez
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

La relación entre las matemáticas y la música no es ni mucho menos nueva. Ya desde los tiempos de Pitágoras (s. VI a. C.), la música atrajo la atención de los matemáticos, naciendo distintas teorías. La música ha estado desde siempre presente en culturas antiguas como la caldea, la egipcia o la babilónica, pero los pitagóricos fueron los que establecieron una unión profunda entre la música y las matemáticas.

A modo de aclaración, dentro de las escuelas presocráticas se encontraba la escuela pitagórica. El orfismo influyó decisivamente en el pitagorismo o secta pitagórica, secta filosófico–religiosa fundada por Pitágoras. Los pitagóricos, con tal de alcanzar la purificación del alma, término también conocido como *catharsis*, no podían comer carne o habas, incluso no eran permitidos los vestidos de lana, entre otras muchas prohibiciones.

Existía una división en dos clases de miembros, los matemáticos (*mathematikoi*, conocedores); es decir, los iniciados a quienes Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos a su disposición y los acusmáticos (*akousmatikoi*, oidores) que participaban de los conocimientos y creencias, de los principios morales, ritos y prescripciones específicas de la hermandad, si bien sin conocer en profundidad las razones de su credo y su proceder.

 ISSN 1988-5318

De hecho, los pitagóricos añadieron nuevas formas de catharsis referentes al cultivo o estudio de las matemáticas y la música (utilizaban el término *musiké* para referirse a un conjunto de actividades que podía abarcar desde la gimnasia y la danza, hasta la poesía y el teatro, comprendiendo también la música y el canto). Una y otra enseñan la armonía y pueden ayudarnos a entender y contemplar el universo armónico.

El concepto de armonía es central en la especulación de los pitagóricos, pero resulta ser un concepto musical sólo por analogía o por extensión, ya que su significado original era, sobre todo, metafísico. Estos creían que toda naturaleza era armonía que brotaba de números y utilizaron las razones numéricas y las proporciones como una forma de teorizar sobre la música, a través del gran conocido experimento del monocordio.

Se le atribuye a Pitágoras el haber establecido (gracias a este experimento) la correspondencia entre los intervalos musicales y las razones matemáticas de una cuerda, descubriendo que ciertos intervalos podrían ser producidos estableciéndose razones simples $\frac{a}{b}$ en la cuerda.

Estos intervalos resultantes de las proporciones simples $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ que se hacían en la cuerda fueron nombrados consonancias perfectas y consistían estrictamente en intervalos cuyas razones subyacentes estaban formadas solamente por pequeños números 1, 2, 3 y 4 la *tetraktys*. Como aclaración, dentro del juramento pitagórico mencionaban la *tetraktys* de esta forma: *«No, por aquel que ha entregado a nuestras almas la tetraktys, una fuente que contiene las raíces de la naturaleza eterna»*. Los pitagóricos sólo admitían tres consonancias simples porque eran las únicas que se hallaban en proporciones múltiples, dentro de los límites impuestos por la *tetraktys* o suma de los cuatro primeros números: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Estos intervalos serían la 8.ª, 5.ª y 4.ª, base del sistema musical polifónico hasta la aparición de las terceras.

Consonancia	Intervalo	Ratio	Proporción
Diapason	Octava	2 : 1	Dupla
Diapente	Quinta	3 : 2	Sesquiáltera
Diatessaron	Cuarta	4 : 3	Sesquitercia

Escala diatónica y afinación pitagórica

Se dice que Pitágoras se quedaba siempre ensimismado escuchando el estruendo de los martillos al pasar por la herrería. Impresionado por la diferencia de sonidos que estos presentaban, y dada su creencia de que a todo se le podía asociar un número, no es de extrañar que se aventurase a tratar de medir el sonido.

Para dar una explicación al fenómeno de los diferentes sonidos pensó en posibles explicaciones: el material con el que estaban hechos los martillos, el grosor de estos, el aire en el ambiente y hasta pensó en la fuerza con la que estos eran golpeados.

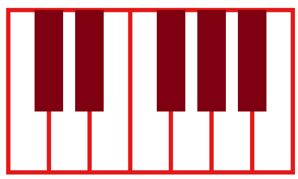
Notó que la diferencia de estos era por el peso de estos instrumentos de trabajo, entonces trasladó esta idea colocando la cuña a diferentes distancias de la cuerda de su monocordio tal y como hoy en día pisamos las cuerdas de una guitarra para crear sonidos diferentes.

Al igual que con los martillos, se dio cuenta que colocando la cuña justo a la mitad de la cuerda el sonido que esta emitía se parecía mucho al que daba con la cuerda en toda su longitud, solo que un poco más aguda. De forma similar, cuando Pitágoras divide la cuerda en cuatro de forma imaginaria y colocaba la cuña de forma que de un lado hubiera $\frac{1}{4}$ de la cuerda y del otro lado de la cuña $\frac{3}{4}$ de la cuerda, al tocar la parte más corta se daba cuenta que el sonido seguía siendo parecido al tocar la cuerda al aire pero ahora mucho más aguda. Esto es lo que tiempo después conoceríamos como tocar la misma **nota musical**, pero una octava más arriba o bien más abajo.

Monocordio

Pitágoras se percató de la consonancia entre la nota producida por todo el monocordio y la que producía su quinta ($\frac{2}{3}$ de la cuerda), así que se dispuso a buscar la quinta de la nota que acababa de obtener, es decir, la quinta de la quinta. Matemáticamente, esto suponía hacer vibrar $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de cuerda: $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Naturalmente, estas dos notas sonaban «con armonía», pero la última nota era muy aguda en comparación con el sonido del que partíamos inicialmente. Esto se debe a la **frecuencia** de dicha nota, la propiedad física asociada a la vibración de un cuerpo, haciendo que este suene más agudo o más grave. En el caso de la cuerda, al hacer vibrar su mitad $\left(\frac{1}{2}\right)$ la frecuencia pasa a ser el doble de la original (su octava), y al dividir la cuerda en $\frac{2}{3}$ de la misma, su frecuencia se multiplica $\frac{3}{2}$.



Sucesión de quintas

Entonces, Pitágoras repitió este proceso de calcular la quinta de cada nota que obtenía, hallando así una **sucesión de quintas** que continúa hasta llegar a la duodécima quinta, la cual produce un sonido extremadamente similar al de la nota por la que comienza esta sucesión, más concretamente al sonido de la séptima octava de la nota inicial.

Algo parecía indicar que se había encontrado un ciclo, de forma que, dada una nota, calcular 12 quintas hacia arriba o 7 octavas a partir de ella llevaría de nuevo a la misma nota, dando lugar, por el camino, a otras 11 notas musicales distintas. Sin embargo, las matemáticas no iban a estar del todo de acuerdo en esto.

ISSN 1988-5318

Semitonos y escala temperada

Lamentablemente, estos dos caminos de construir 7 octavas y 12 quintas perfectas no pueden llevar al mismo sitio, pues así lo dictaminan las matemáticas.

Dada una nota con una frecuencia f, calculamos su quinta, cuya frecuencia será $\frac{3}{2}f$; calculando la quinta a partir de esta última nota, obtenemos otra con frecuencia de $\left(\frac{3}{2}\right)^2 f$. Este proceso se reitera, tal y como hemos descrito, hasta lograr una frecuencia de $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} f$.

Por otro lado, partiendo de la misma nota inicial, podemos calcular su octava alta, cuya frecuencia será el doble, 2f, y así hasta $2^7 f$. De hecho, cualquiera que sea la frecuencia de partida no tiene gran importancia, pues matemáticamente es una progresión de la misma razón para todas notas musicales con las que se pueda comenzar.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} f \stackrel{?}{=} 2^7 f$$

Aunque los sonidos producidos son casi gemelos, hemos de tener en cuenta que 2 y 3 son **números coprimos**, de forma que el cociente $\frac{3^p}{2^q}$ no puede dar lugar a un número entero para ningún $p, q \in \mathbb{N}$. No obstante, cabe pensar que el valor numérico de ambos lados es, como mínimo, muy próximo. La distancia entre estos es:

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - 2^7\right| = 1{,}746337890625000\ldots$$

Puede parecer una distancia significativa, pero si en lugar de restarlos tomamos la razón entre ambos obtenemos un error relativo diminuto. Este error en la frecuencia de las notas es prácticamente inapreciable para el oído en ausencia de otra referencia con la que comparar, por lo que estas dos notas se pueden considerar la misma.

$$\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - 2^7}{2^7}\right| = 0{,}013643264770508\ldots$$

El caso es que estas dos formas distintas de crear notas dan lugar a escalas distintas. Por un lado teníamos la escala pitagórica, aquella en la que todas las 12 notas surgen a partir de hallar quintas sucesivamente y trasponer todas estas a un mismo intervalo de octava. El problema es que si bien existía un mínimo error entre la duodécima quinta y la séptima octava, este mismo error persiste en el resto de notas halladas a través de la afinación pitagórica; aunque, afortunadamente, no es nada que no se pueda arreglar con un pequeño ajuste.

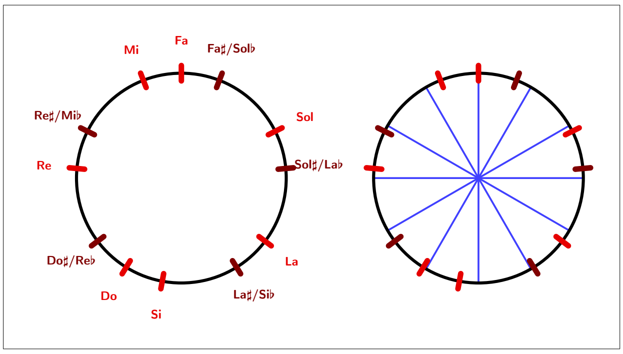
A partir del siglo XVI se populariza el uso de una escala musical en la cual la distancia entre la frecuencia de cada nota era exactamente la misma, es decir, una escala con **igual temperamento** (Esta palabra no pasará desapercibida para los lectores con formación musical, por obras como *El clave bien temperado* de Johann Sebastian Bach). La idea al construir esta escala era que el salto de frecuencia ente las 12 notas fuese el mismo; matemáticamente, si para pasar de una nota a su octava había que dar 12 pasos y con estos 12 pasos se duplicaría la frecuencia, se trata de resolver la ecuación:

$$x^{12} f = 2f \Rightarrow x = \sqrt[12]{2}$$

Por lo que en la escala igualmente temperada la distancia de cada nota a la siguiente es $\sqrt[12]{2}f$, siendo f la frecuencia original.

Cabe destacar que este tipo de afinación fue promovida en gran parte por el auge de instrumentos como el clave o tiempo más tarde por el piano, para los cuales resultaba muy útil tener una referencia de cálculo sencilla a la hora de afinarlos.

En la figura se anticipa una de las consecuencias más importantes de este tipo de afinación, y es que las 7 primeras notas obtenidas a partir del **Fa**, marcadas en rojo claro, conforman la «Escala Mayor», aquella dada por las teclas blancas de un piano.



Escala pitagórica y desajuste

La secuencia de la sucesión de quintas sería: **Fa** – **Do** – **Sol** – **Re** – **La** – **Mi** – **Si**. Las cinco notas obtenidas a partir del **Si** tienen un sonido intermedio de las anteriores: **Fa♯** – **Do♯** – **Sol♯** – **Mi♭** – **Si♭**; siendo ♯ (sostenido) algo más agudo y ♭ (bemol) algo más grave.

Si tomamos como referencia la escala mayor e intercalamos las 5 notas obtenidas tras estas, obtenemos lo que se conoce como escala cromática. En el dibujo están ordenadas por frecuencia ascendentemente, el mismo orden en el que están establecidas las teclas del piano; todo por «culpa» de Pitágoras.

Todo esto nos da una visión y justificación de cómo las matemáticas y música guardan una gran conexión entre sí. A modo de curiosidad, Albert Einstein consideraba imprescindible su violín, apodado Lina, para el cultivo de su creatividad y nació también un 14 de marzo, que coincide con el día de las Matemática. Desde Territorio Estudiante deseamos que hayáis pasado un día magnífico. Concluimos la sección con una cita de Jean Philippe Rameau que dice así:

> *«La música es una ciencia que debe tener unas reglas establecidas; estas reglas deben derivarse de un principio evidente, y este principio no puede revelarse sin la ayuda de las matemáticas».*

ISSN 1988-5318

Referencias

[1] Biblioteca Virtual FAHUSAC. *¿Por qué usamos 12 notas? De Pitágoras a Bach* [16]. (Consultado el 23 de marzo de 2026).

[2] Bullen, P. (2013). Means and Their Inequalities. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.*

[3] Heller–Roazen, D. (2011). *The Fifth Hammer: Pythagoras and the Disharmony of the World*. Zone Books.

■

Responsables de las secciones

Aviso legal

[16] *bvhumanidades.usac.edu.gt/items/show/1899*.

 ISSN 1988-5318