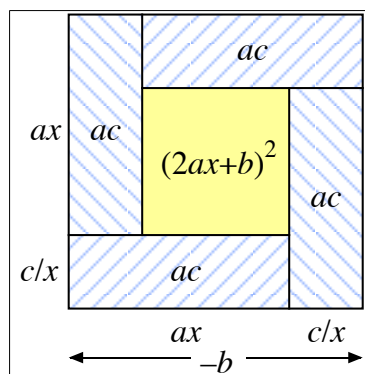




Una visión geométrica de la resolución de la ecuación de segundo grado

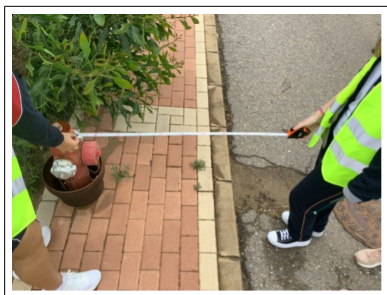
Roger B. Nelsen es ampliamente conocido en el ámbito matemático tanto por su amplia trayectoria investigadora como por sus publicaciones relacionadas con la divulgación matemática, en las que siempre podemos encontrar un enfoque muy original. Destacamos su serie *Proofs without words* o el libro publicado en castellano *Demstraciones con encanto*, que hemos reseñado en el número anterior del Boletín.

En este número nos presenta la resolución de la ecuación de segundo grado desde un punto de vista diferente al que estamos habitualmente acostumbrados.

(Ver artículo en la página 2)

Resumen

Un *Learning Path* de trigonometría aplicada al entorno



En no pocas ocasiones, el profesorado de matemáticas se encuentra con

esta cuestión planteada por algún estudiante: *Profe, ¿para qué sirven las matemáticas?*

Este artículo, elaborado por María del Mar Llobregat, docente de Matemáticas en el SEK-Alborán de El Ejido, nos presenta una actividad en la que el alumnado puede establecer un contacto directo entre conceptos matemáticos y su realidad más cercana.

(Ver artículo en la página 10)

Editorial: Dos décadas

Comenzamos el vigésimo número del Boletín. Veinte años, ¡quién lo diría! Cuando iniciamos esta andadura allá por el año 2007 ni en las más optimistas de nuestras previsiones podríamos haber considerado que veinte años después seguiríamos en la brecha.

Este editorial es, como no puede ser de otra forma, una editorial de agradecimiento. Este proyecto, totalmente altruista, hubiera sido imposible sin el apoyo y la dedicación de las personas que, de un modo u otro, han participado en él. La labor de los responsables de sección ha sido, y es, fundamental. La selección y revisión de los artículos hace que la calidad de nuestro Boletín sea muy alta.

Queremos dar las gracias especialmente al profesorado de secundaria por su implicación, ya que son quienes fomentan entre sus estudiantes la pasión por las matemáticas invitando a sus estudiantes a leer el Boletín y, como no, a participar en el concurso de problemas.

Somos el único proyecto de este tipo que existe en nuestro país. Este hecho nos hace sentirnos muy orgullosos, pues se trata de una tarea colectiva que muestra la fortaleza de nuestra titulación de Matemáticas. ¡Mil gracias a todos y a todas!

Actividades matemáticas p. 2

Enseñanza primaria p. 8

Enseñanza secundaria p. 10

Concurso de problemas p. 14

Divulgación matemática p. 16

Territorio estudiante p. 27

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN

1988-5318 (Ed. en línea)
3101-7541 (Ed. impresa)
Depósito Legal: AL 522-2011

ARTÍCULO INVITADO

Una visión geométrica de la resolución de la ecuación de segundo grado

Roger B. Nelsen
Lewis & Clark College (Portland, Oregón, EE. UU.)

La conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1)$$

que proporciona las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

(con $a \neq 0$), es un pilar fundamental en cualquier curso básico de álgebra. Sin embargo, cuando muchos estudiantes llegan a la universidad, no recuerdan (o no han visto nunca) cómo se deduce esa fórmula mediante el método de «completar el cuadrado».

En esta nota proporcionaremos una interpretación geométrica de algunos de los términos de la fórmula (1), para motivar su deducción mediante la completación de un cuadrado; una completación que es diferente a la que suele encontrarse en la bibliografía básica.

Para lo cual, comenzamos reescribiendo la ecuación (2) como

$$ax + b + (c/x) = 0. \quad (3)$$

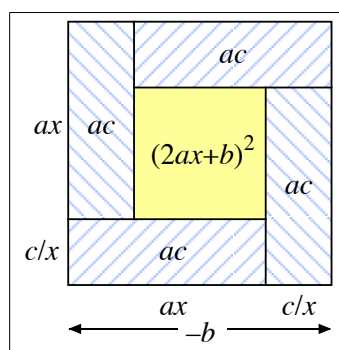


Figura 1: Representación geométrica de algunos términos de las ecuaciones (1) y (3)

y cuatro rectángulos del mismo tamaño.

En la Figura 1, dos de los términos de la fórmula (1) aparecen como áreas: b^2 es el área del cuadrado mayor y $4ac$ es la suma de las áreas de los cuatro rectángulos incluidos en dicho cuadrado. El lado del cuadrado interior es $ax - (c/x)$. Además, sumando ax a los dos términos de la igualdad $ax + b = -(c/x)$, se obtiene $2ax + b = ax - (c/x)$, por lo que el área de dicho cuadrado es $(2ax + b)^2$. Luego

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \quad (4)$$

Aunque la ilustración de la Figura 1 es solo un caso particular, sugiere que deberíamos completar el cuadrado en la ecuación (2) para obtener el término $(2ax + b)^2$. Para hacer esto, se multiplica esa ecuación por $4a$, obteniendo

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

y se suma b^2 en ambos términos, llegándose a

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

que es equivalente a la ecuación (4). Luego, tomando raíces cuadradas, se obtiene

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

por lo que

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Despejando x en esta igualdad, se obtiene ya la ecuación (1).

Este modo de completar un cuadrado de una suma para resolver la ecuación de segundo grado no es nuevo. Tampoco lo era cuando apareció hace más de cincuenta años en un artículo de Hoehn [1], en el que se revisaba su historia y lo comparaba con el método estándar de completar el cuadrado. Al combinarse con la motivación geométrica que proporciona la Figura 1, se convierte en una alternativa recomendable al método estándar.

Por otra parte, fijémonos ahora en el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de la ecuación (2). Sabemos que su signo revela la naturaleza de las soluciones de dicha ecuación. Sin embargo, su magnitud rara vez se menciona.

Cuando es no negativo, Δ proporciona la distancia entre las dos soluciones de la ecuación (2), que es $\sqrt{\Delta}/|a|$.

Más interesante aún es, posiblemente, la interpretación que ofrece la ecuación (4). Esta permite relacionar Δ con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ en sus puntos de corte con el eje x —las soluciones de la ecuación (2)— como muestra el siguiente resultado.

Teorema. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si $f(x_0) = 0$, entonces $[f'(x_0)]^2 = \Delta$.

Demostración. Como $f'(x) = 2ax + b$, tenemos que $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Elevando al cuadrado y usando la ecuación (4) (que es aplicable por ser x_0 una solución de (2)) se obtiene la igualdad deseada:

$$[f'(x_0)]^2 = (2ax_0 + b)^2 = b^2 - 4ac = \Delta.$$

Como consecuencia del teorema, si $\Delta > 0$, las pendientes de la función f en las dos soluciones de la ecuación (2) son $-\sqrt{\Delta}$ y $\sqrt{\Delta}$, valores que encontramos al utilizar la fórmula (1) para calcular dichas soluciones.

Referencias

- [1] Larry Hoehn. A more elegant method of deriving the quadratic formula. *The Mathematics Teacher*, Vol. 68(5):442–443, May 1975.

Actividades matemáticas

Entrega del premio del Boletín

El 27 de mayo, Juan José Moreno Balcázar y Cristina Rodríguez Perales hicieron entrega del premio del Concurso de Problemas del Boletín a Paula Ayala Román en el *IES Alborán-Manuel Cáliz* de Almería.



La premiada con sus profesoras

Con motivo de la entrega, Juan José impartió una charla sobre el calendario y los años bisiestos, mientras que Cristina les habló de las razones que le llevaron a estudiar el Grado en Matemáticas y a dedicarse posteriormente a la investigación.

XI Concurso IndalMat



Cartel anunciador

El 16 de octubre la *Universidad de Almería* celebró la undécima edición del concurso de resolución de problemas matemáticos *IndalMat*, dirigido al alumnado de 4.º de ESO y Bachillerato de toda la provincia.

La convocatoria reunió a 660 estudiantes procedentes de 54 centros educativos, acompañados de 70 profesores. El concurso puso a prueba la capacidad de razonamiento y resolución de problemas de los estudiantes a través de diferentes retos matemáticos.



Presentación de Eduardo Sáenz de Cabezón

La iniciativa contribuye, además, a su preparación para la *Olimpiada Matemática Nacional*, organizada por la

Real Sociedad Matemática Española (RSME), que tendrá lugar del 11 al 14 de marzo de 2027 en la *Universidad de Almería*.

Tras la competición, los participantes disfrutaron de la conferencia *No sabías que podías aprender tanto*, impartida por el matemático y divulgador científico Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray.



Los estudiantes participantes en el Paraninfo de la UAL

Los ganadores de cada categoría se darán a conocer el próximo 17 de noviembre.

Jornada de Puertas Abiertas del Departamento de Matemáticas 2026



El *Departamento de Matemáticas* celebró el 21 de octubre su tradicional *Jornada de Puertas Abiertas*. En colaboración con la *Facultad de Ciencias Experimentales*, se ha inaugurado la exposición *En los ORÍGENES. Arte, Matemática y Mujer en la Prehistoria*, que explora los posibles orígenes del pensamiento matemático y las conexiones entre el arte, los símbolos y las primeras formas de registro numérico en la Prehistoria.

La jornada se completó con la conferencia *¿Fueron mujeres «los» primeros matemáticos?*, impartida por Francisco A. González Redondo, profesor de la *Universidad Complutense* de Madrid y comisario de la exposición.

Noche Europea de los Investigadores 2026

El pasado 25 de septiembre la *Universidad de Almería* acercó un año más la ciencia a la ciudadanía con la celebración de la *Noche Europea de los Investigadores*.

El centro de la ciudad acogió 89 actividades de 610 investigadores e investigadoras. Además, previamente se

realizaron 65 actividades en centros educativos de la provincia.



Esperanza matemática y la ilusión de jugar

Profesorado del *Departamento de Matemáticas* organizó las actividades *Esperanza matemática y la ilusión de jugar* y *Estadística e Inteligencia Artificial Generativa*.



Estadística e Inteligencia Artificial Generativa

A través de juegos, acertijos y retos de lógica, los participantes descubrieron la investigación matemática de una forma amena y entretenida, y conocieron el papel fundamental de la estadística en el desarrollo de una inteligencia artificial confiable.

Presentación del libro *200 columnas de divulgación científica*

El 22 de julio la *Facultad de Ciencias Experimentales* presentó el libro *200 columnas de divulgación científica*, editado por la *Editorial Universidad de Almería*.

La obra reúne los doscientos primeros artículos publicados quincenalmente desde 2021 en los periódicos *Diario de Almería* e *Ideal*, para acercar la investigación a la ciudadanía.



De izquierda a derecha: Miguel Cárcelos, director de Ideal, Juan J. Moreno, decano de la Facultad de Ciencias Experimentales, e Iván Gómez, director de Diario de Almería

El volumen aborda temas que van desde las ciencias ambientales hasta la química, pasando por la biotecnología, la física y las matemáticas. Todas ellas ramas científicas de los grados de la *Facultad de Ciencias Experimentales*.

Entrega de premios de las Olimpiadas de Ciencias Experimentales 2026

El pasado 10 de junio, la *Facultad de Ciencias Experimentales* celebró la entrega de premios de las *Olimpiadas de Ciencias Experimentales 2026*, reconociendo el talento y la excelencia académica de los estudiantes de Secundaria y Bachillerato con mejores resultados en las fases locales de Biología, Ciencias Ambientales, Física, Geología, Matemáticas y Química.



Acto de entrega de los premios

La iniciativa puso en valor tanto el esfuerzo y la dedicación del estudiantado como la labor del profesorado, cuyo compromiso resulta fundamental para impulsar las vocaciones científicas desde las aulas.

En la Olimpiada de Matemáticas, los galardonados fueron Nicolás Javier Vargas Fernández, Carlos González Velasco y Ariadna Azor Gabaldón. ¡Enhorabuena!

Conferencia de Brian Schmidt



Brian Schmidt

Brian Schmidt, Premio Nobel de Física en 2011, impartió la conferencia *Entendiendo la expansión acelerada del universo*, abordando las investigaciones que llevaron al descubrimiento de la expansión acelerada del universo y su impacto en la comprensión actual del cosmos.

Dentro de las *XIV Jornadas Astronómicas de Almería* también se celebró un almuerzo-coloquio con Brian Schmidt y un «Café con Ciencia» con Carole Mundell, directora de Ciencia de la *Agencia Espacial Europea* (ESA), dedicado a acercar a la comunidad universitaria la investigación y las misiones científicas desarrolladas por la agencia.

Conferencia de Decanos de Matemáticas

La XXIII reunión de la Conferencia de Decanos de Matemáticas se celebró los días 7 y 8 de mayo en la Universidad de Alicante.



Foto de familia

El encuentro sirvió para debatir cuestiones como la conexión entre los grados de Matemáticas y las prácticas externas, la situación actual de la enseñanza de las Matemáticas en la educación secundaria, el impacto de la inteligencia artificial en la docencia y la evaluación, y el papel fundamental que desempeñan las asignaturas de Matemáticas en otras titulaciones universitarias.

Proyecto Los pingüinos de la Antártida



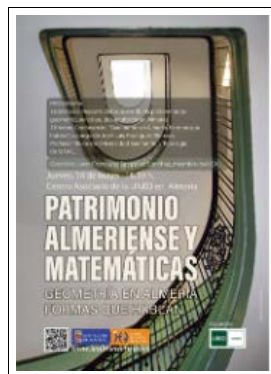
Acto de entrega del reconocimiento

La Universidad de Almería, la Subdelegación de Defensa y la Delegación de Desarrollo Educativo y

Formación Profesional organizaron el concurso *Descubriendo la Antártida*, una iniciativa de innovación educativa destinada a despertar vocaciones científicas y fomentar el interés por la investigación.

El proyecto *Los pingüinos de la Antártida*, desarrollado por un equipo de estudiantes de 4.º de ESO del colegio *Compañía de María* y tutorizado por Eva M.ª Artés Rodríguez, profesora del Departamento de Matemáticas de la UAL, ha obtenido el tercer puesto.

Patrimonio Almeriense y Matemáticas



Cartel

José Luis Rodríguez Blancas, profesor del Departamento de Matemáticas de la UAL, impartió el 14 de mayo la conferencia *Geometría en Almería, formas que hablan*, dentro del ciclo *Patrimonio Almeriense y Matemáticas*.

En ella ofreció una visión matemática del patrimonio y del paisaje urbano almeriense, mostrando cómo la geometría está presente en las formas, proporciones y estructuras de algunos de los espacios más representativos de la ciudad.

Actividades de la SAEM Thales

La SAEM Thales está organizando las siguientes actividades:

- Concurso *Canguro Matemático 2027* para estudiantes de ESO y Bachillerato, y para estudiantes de Primaria. Se celebrará el 8 de abril de 2027. Más información en: canguromat.es.
- Microcredencial Universitaria en *Resolución de Problemas y Sentidos Matemáticos*, organizada en colaboración con la UNED. Se impartirá del 8 de marzo al 30 de abril de 2027¹.

Noticias matemáticas

Columnas de divulgación matemática

Los periódicos almerienses *Diario de Almería* e *Ideal* publican regularmente artículos de divulgación científica en colaboración con la Facultad de Ciencias Experimentales. Los relacionados con las matemáticas, desde la publicación del último número del Boletín, son:

- *Florentino y el sesgo de supervivencia*, por Ana Devaki Maldonado González (22/05/2026).
- *El algoritmo del amor perfecto*, por José Cáceres González (24/06/2026).

- *¿Hacemos un sudoku?*, por José Antonio Rodríguez Lallena (31/07/2026).
- *¿Es realmente inteligente la IA?*, por Fernando Reche Lorite (02/10/2026).

V Premio al mejor TFG en Matemáticas

El jurado del Premio UAL-RSME al mejor TFG en Matemáticas ha otorgado esta distinción al estudiante Francisco Alguacil Gómez por el trabajo titulado *Análisis*

1. Información en formacionpermanente.uned.es/tp_actividad/actividad/microcredencial-universitaria-en-resolucion-de-problemas-y-sentidos-matematicos.

comparativo de arquitecturas híbridas bayesianas para la predicción de series.

La entrega del premio tendrá lugar el 13 de noviembre dentro de las actividades que realiza la *Facultad de Ciencias Experimentales* por su patrón.

LXIII Olimpiada Matemática Española en la UAL

La Universidad de Almería acogerá del 11 al 14 de marzo de 2027 la *LXIII Olimpiada Matemática Española*. El encuentro reunirá en Almería a más de un centenar de estudiantes procedentes de toda España.



De izquierda a derecha: vicepresidente del Comité Organizador, presidenta del Consejo Social, Rector de la UAL, presidenta de la RSME y presidente del Comité Organizador de la Olimpiada

La celebración supone una oportunidad para promover el talento joven, despertar vocaciones científicas y acercar las matemáticas a la sociedad, además de una ocasión de gran relevancia social, económica y cultural para la provincia de Almería.

XV Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales

Con motivo de la festividad de San Alberto Magno, los días 12 y 13 de noviembre se celebrará una nueva edición del *Simposio de Investigación de la Facultad de Ciencias Experimentales*, donde compartirán sus trabajos jóvenes investigadores de las áreas de Biotecnología y Bioprocesos Industriales, Ciencias Aplicadas y Medioambientales, Matemáticas y Química.



Banner del simposio

Se premiarán las mejores comunicaciones flash seleccionadas entre los pósteres presentados.

La programación se completará con la conferencia de San Alberto, a cargo de Miguel Ángel Esteve Selma, catedrático de Ecología de la Universidad de Murcia, titulada *Lecciones ambientales de un colapso ecológico: ciencia-gestión en la laguna del Mar Menor*, en la que se abordará un colapso ecológico ejemplificado en la laguna del Mar Menor.

Más información en www2.ual.es/isimpos.

VII Premios de investigación San Alberto 2026

La *Facultad de Ciencias Experimentales* ha convocado la séptima edición de los *Premios de Investigación San Alberto 2026*, destinados a reconocer los mejores artículos científicos publicados durante este año. Se han concedido 14 premios entre las áreas de Biotecnología, Ciencias Ambientales, Matemáticas, Química y Física.

Los premiados en el campo de las Matemáticas han sido Miguel Ángel Sánchez Granero, Darío Ramos López y Antonio Jiménez Vargas. Los galardonados presentarán sus trabajos el 6 de noviembre.

Semana de la Ciencia 2026

Del 5 al 11 de noviembre, la *Universidad de Almería* celebrará la *Semana de la Ciencia 2026*, organizada por la *Unidad de Cultura Científica y de la Innovación (UCC+i)* y la OTRI.

La iniciativa, dirigida al alumnado de 4.º de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y centros de menores de la provincia, tiene como objetivo acercar la investigación y fomentar las vocaciones científicas.

Entre las propuestas de esta edición, el *Departamento de Matemáticas* participará con el taller *Stat Wars: La fuerza de los datos*, una actividad divulgativa diseñada para despertar el interés por la estadística.

La programación incluirá el «Café con Ciencia», con investigadores e investigadoras que compartirán sus experiencias con grupos de estudiantes.

Nueva edición del Máster propio en Ciencia de Datos y Matemática Computacional

El *Centro de Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa (CDTIME)* ha ofertado la segunda edición del *Máster propio de Formación Permanente en Ciencia de Datos y Matemática Computacional*.

Impartido online de forma asíncrona, combina matemáticas, estadística, programación científica e ingeniería de datos en una formación especializada y orientada a las demandas del mercado laboral.

Toda la información de este máster en www2.ual.es/masterdatamat.

Día Europeo de la Estadística



El pasado 20 de octubre se celebró el *Día Europeo de la Estadística*, una iniciativa promovida por el *Comité Consultivo Estadístico Europeo (ESAC)* y respaldada por el *Sistema Estadístico Europeo* y el *Sistema Europeo de Bancos Centrales*.

Bajo el lema *La estadística europea en una encrucijada: prioridades, oportunidades y limitaciones*, en esta edición se ha invitado a reflexionar sobre los retos y las oportunidades de la estadística oficial en un contexto de transformación tecnológica y social.

Premio Ruth I. Michler 2026/27



Martha E. Precup

La *Asociación de Mujeres en Matemáticas* ha concedido el *Premio Conmemorativo Ruth I. Michler 2026/27* a Martha E. Precup, profesora asociada de Matemáticas en la

Universidad de Washington en San Luis, en reconocimiento a sus investigaciones en combinatoria y geometría algebraica.

VIII Congreso de Jóvenes Investigadores RSME

El *VIII Congreso de Jóvenes Investigadores de la RSME* se celebrará en Zaragoza del 18 al 22 de enero de 2027. Este evento reúne cada dos años a jóvenes investigadores en matemáticas de todo el mundo para compartir sus más recientes resultados de investigación.

Más información en jovenesrsme27.unizar.es.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a Antonio González Herrera, de la Universidad de Sevilla; Thomas Heede, de la Universidad de Aalborg (Dinamarca); John

Alejandro Mendoza Rodríguez, de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia; Maria das Neves Rebocho, de la Universidade da Beira Interior (Portugal); Philipp Rothmaler, de la City University de Nueva York (EE.UU.); Joaquín F. Sánchez Lara, de la Universidad de Granada; y Yorck Sommerhäuser, de la Memorial University of Newfoundland (Canadá).

Preguntas frecuentes

¿Qué acreditación lingüística necesito para poder obtener el grado?

Los estudiantes que soliciten el título hasta el 30 de septiembre de 2029, así como aquellos que hayan iniciado sus estudios oficiales en el curso 2025/26 o en cursos anteriores, deberán acreditar un nivel B1 o superior de una lengua extranjera, de acuerdo con el *Marco Común Europeo de Referencia para las Lenguas*.

Por otra parte, los estudiantes que hayan iniciado sus estudios de Grado en el curso 2026/27 o en cursos posteriores y soliciten el título a partir del 30 de septiembre de 2029 deberán acreditar un nivel B2 de una lengua extranjera.

¿Puedo reconocer créditos optativos del grado acreditando alguna certificación de idiomas?

Si acreditas un nivel de idioma superior al exigido para obtener el título, o un nivel B1 o superior en un segundo idioma, podrás obtener el reconocimiento de hasta 6 créditos optativos (ECTS) del grado.

¿Puedo solicitar alguna ayuda para la acreditación de la lengua extranjera?

Cada curso la *Facultad de Ciencias Experimentales* a través del *Vicerrectorado de Grados e Innovación*

Docente convoca ayudas económicas para promover la realización de cursos de idiomas en el *Centro de Lenguas* de la *Universidad de Almería*, que a su vez preparen para la realización de exámenes que tengan como objetivo la acreditación lingüística B1 o B2 requerida para la obtención del título de Grado.

¿Puedo cursar alguna asignatura del grado en Matemáticas en inglés?

Como parte del *Plan de Plurilingüismo* impulsado por la *Universidad de Almería*, desde el curso 2023/24 es posible cursar asignaturas del grado en Matemáticas en inglés, es decir, además del grupo en español, hay asignaturas que disponen de un segundo grupo impartido íntegramente en inglés.

En el curso 2026/27, se han ofertado un total de 10 asignaturas del grado en este idioma: *Ecuaciones Algebraicas*; *Elementos Básicos de las Matemáticas*; *Estadística Matemática*; *Estructuras Básicas del Álgebra*; *Geometría Elemental*; *Introducción a la Probabilidad y a la Estadística*; *Matemática Discreta*; *Métodos Numéricos I*; *Métodos Numéricos II* y *Optimización*. Se espera aumentar las ofertas en próximos cursos².

Por tanto, se pueden cursar hasta un total de 60 créditos en inglés, lo que supone un 25 % de los créditos del grado. Además, los estudiantes que cursen en inglés al

2. Para más información: www.ual.es/application/files/6817/9198/4148/Asignaturas_Grados_Bilingues_2026-2027.pdf.

menos el 25 % de los créditos del grado en la *Universidad de Almería*, podrán obtener un certificado acreditativo de la realización del itinerario bilingüe si completan hasta llegar al 50 % de los créditos del título con asignaturas

impartidas en inglés, mediante estancias de movilidad nacional o internacional³.

ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

Formular problemas para aprender a pensar

Una experiencia de formulación en el primer ciclo de Educación Primaria

Laura García Infante
Natalia Molina Valle
Universidad de Huelva

Rocío Pérez Guzmán
CEIP Aurora Moreno (Gibraleón, Huelva)

La formulación de problemas constituye un contenido imprescindible en el currículo matemático de Educación Primaria. Permite desarrollar habilidades relacionadas con el razonamiento lógico, ya que obliga a pensar, y también ayuda a tomar decisiones, puesto que exige comprender la situación y dotarla de sentido matemático.

Sin embargo, no es común en las aulas del primer ciclo de Educación Primaria solicitar al estudiantado que planteen problemas, a pesar de las orientaciones curriculares. Esto representa un importante reto pedagógico para los docentes.

Por un lado, la mayor parte de los libros de texto prioriza la resolución de problemas, incluso omitiendo la creación de problemas. Por otra parte, la evaluación de un problema inventado es compleja y exige un análisis detallado, ya que el docente tiene que revisar no sólo la precisión matemática, sino también la coherencia lógica y la estructura semántica de la propuesta.

Para los niños de estas etapas, idear un problema supone un esfuerzo cognitivo mayor que el de resolverlo. A las dificultades propias de la etapa de adquisición y consolidación de la lectoescritura, se suma la necesidad de estructurar el pensamiento. El alumnado debe ser capaz de:

1. Imaginar y contextualizar un escenario.
2. Seleccionar y acotar los datos adecuados.
3. Establecer una relación lógica y operativa entre dichos datos.
4. Terminar la historia con una pregunta clara y resoluble, un paso que frecuentemente olvidan, transformando el problema en una simple narración lineal.

Para analizar la viabilidad y el impacto de la formulación de problemas en las primeras etapas, se desarrolló y observó una experiencia didáctica en un aula de segundo de Educación Primaria del *CEIP Aurora Moreno*, situado en la localidad onubense de Gibraleón. La intervención

se centró en la formulación de diferentes tipos de problemas matemáticos con alumnado de entre siete y ocho años, poniendo el foco no únicamente en la obtención de resultados correctos, sino especialmente en los procesos de pensamiento y modelización.

El grupo ya estaba familiarizado con la resolución de problemas desde Educación Infantil, a través de dinámicas basadas en la comprensión, la verbalización y la interpretación de situaciones matemáticas. Además, se había trabajado ocasionalmente la formulación de problemas a nivel oral, así como la reformulación de un problema dado, a través de preguntas como ¿y si...? ¿qué pasaría si...?, para incitar el cambio de algunas de las condiciones del problema. Aunque el alumnado todavía mostraba la inseguridad lógica de su edad ante tareas abiertas, el nivel de desarrollo y autonomía observado fue notablemente superior al habitual en estudiantes de esta edad.

Fases de la propuesta didáctica

La propuesta se articuló en torno a tres fases, precedidas por una fase de motivación, en la que se proyectó un video realizado por la maestra en la que la mascota de la clase, «la ovejita Paquita», contaba su experiencia matemática y pedía ayuda al estudiantado para inventar problemas. Con esta motivación inicial los alumnos estaban predisuestos a comenzar las actividades planteadas.

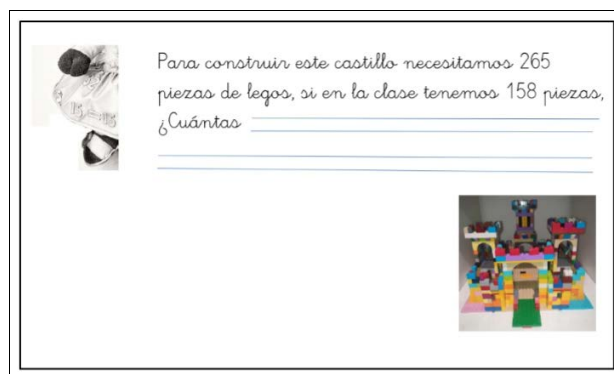


Figura 1. Actividad 1: formulando preguntas para generar problemas

1. Del dato a la pregunta: comprender antes que operar

La sesión comenzó con una actividad de andamiaje realizada junto a la tutora, consistente en plantear preguntas

3. Para más información: www.ual.es/application/files/9517/7435/5218/Convocatoria_de_plurilinguismo_2026.report.pdf.

matemáticas a partir de un contexto cotidiano dado (ver Figura 1).

Tradicionalmente, el alumnado responde preguntas preestablecidas, reproduciendo esquemas cerrados donde solo debe identificar cifras y calcular. Al invertir el foco y exigir generar preguntas, la actividad obligó a los niños y niñas a interpretar la información disponible y comprender qué elementos de una situación son susceptibles de análisis matemático. El estudiantado elaboró cuestiones relacionadas con las cantidades, las comparaciones y las relaciones de cambio, reflejando la resta con diferentes significados (ver Figura 2).

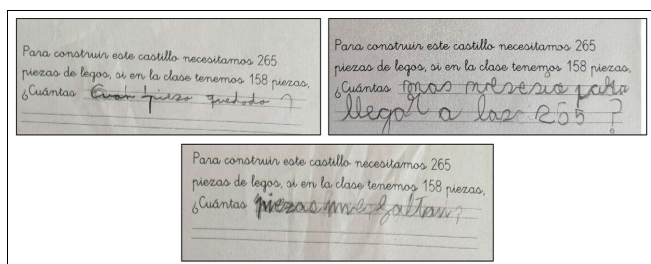


Figura 2. Producciones de alumnado de 7-8 años en la actividad 1

2. Completar el enunciado de un problema: formulación de contexto y pregunta

La segunda propuesta supuso un paso más en la abstracción. Se planteó una actividad por parejas, para promover el diálogo matemático y la negociación. La maestra dio a cada pareja tres listones de cartón y se les pedía completar el enunciado y formular una pregunta. La intención era que surgieran problemas de medida. En esta ocasión, se observaron dificultades en el alumnado para formular problemas que no sean aritméticos y para, en algunos casos, formular un problema completo (ver Figura 3).

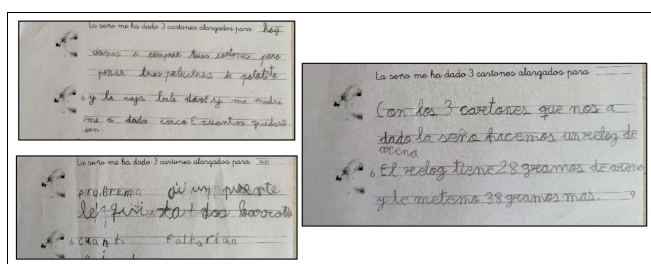


Figura 3. Producciones de alumnado de 7-8 años en la actividad 2

Problema 1: hoy vamos a comprar tres cartones para poner tres peluches de patatita y la caja vale diez y mi madre me ha dado cinco ¿cuántos quedarían?

Problema 2: Si un puente le quita dos barrotes ¿cuánto faltarían?

Problema 3: Con los 3 cartones que nos ha dado la señora hacemos un reloj de arena ¿el reloj tiene 28 gramos de arena y le metemos 39 gramos más?

3. Crear un problema desde cero: la granja como escenario matemático

La tercera fase constituyó el momento de mayor riqueza didáctica. Utilizando como único estímulo la imagen de

una granja (ver Figura 4), el alumnado debía elaborar libremente un problema matemático. Esta tarea se organizó en equipos de trabajo para potenciar la discusión colectiva.



Figura 4. Formulando problemas a partir de una imagen

Lejos de bloquearse ante una hoja en blanco, los estudiantes respondieron con entusiasmo y creatividad. Algunos equipos centraron sus propuestas en el conteo y clasificación de los animales, otros plantearon estructuras de comparación o situaciones de cambio (entradas y salidas de elementos en el establo) (ver Figura 5).

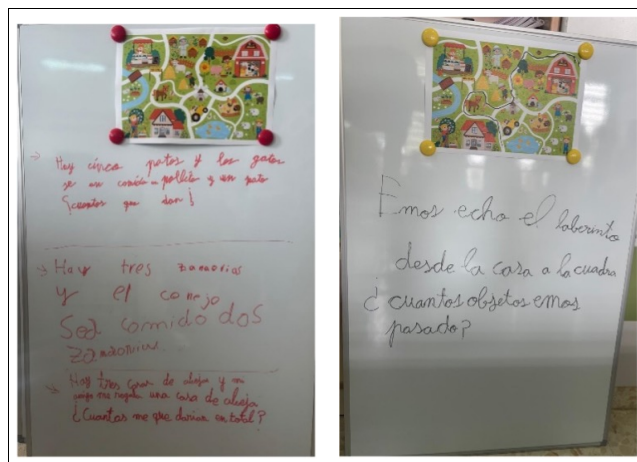


Figura 5. Producciones de alumnado de 7-8 años en la actividad 3

Conclusiones y reflexiones finales

Esta sesión fue diseñada para que todo el alumnado formulara problemas. El hecho de hacer actividades individuales, por parejas y en equipo ayudó a alcanzar este objetivo principal. Se observaron reflexiones en la puesta en común donde los mismos alumnos validaban los problemas formulados por sus compañeros y detectaban errores (por ejemplo, de coherencia del enunciado). Dichos errores se usaban para reformular de forma oral y mejorar los problemas, usándolos como una oportunidad de aprendizaje. Además, tanto en el trabajo por parejas como en las dinámicas grupales, la necesidad de justificar las decisiones propias y escuchar las ajenas obligó al alumnado a organizar y clarificar su propio pensamiento antes de exteriorizarlo, poniendo de relieve el papel del lenguaje verbal como herramienta de mediación cognitiva.

Se apreciaba que los niños y niñas estaban inmersos en la formulación más que en la resolución; de hecho, el resultado de cada problema se obviaba en la puesta en común.

Actividades como estas, ayudan a entender que las matemáticas nos son algo cerrado y con una sola forma de

entender, de explicar o de plantear y resolver problemas, que cada uno puede y debe reflexionar y aportar diferentes propuestas, estrategias o puntos de vistas y validar sus aportaciones y la de los demás. Los resultados evidencian la importancia de iniciar este tipo de trabajo desde edades tempranas. ■

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Un *Learning Path* de trigonometría aplicada al entorno

María del Mar Llobregat Requena
SEK-Alborán (El Ejido, Almería)

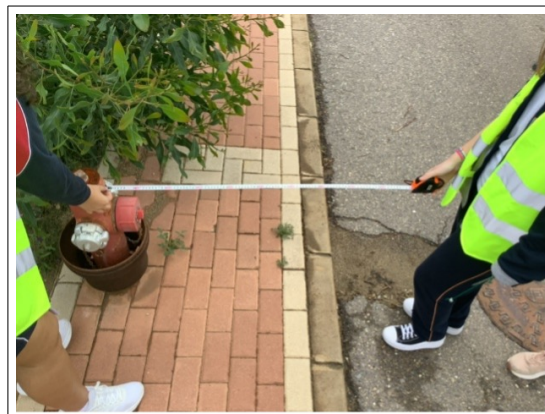
En la enseñanza secundaria, la trigonometría suele percibirse como un bloque especialmente abstracto del currículo matemático. Fórmulas, razones trigonométricas y triángulos aparecen con frecuencia desvinculados de cualquier experiencia vital del alumnado. Frente a esta inercia, la experiencia que aquí se presenta se articula como un *learning path*, un itinerario de aprendizaje que desplaza la asignatura fuera del aula y la confronta directamente con el entorno cotidiano de los estudiantes. El objetivo no fue únicamente aplicar contenidos ya aprendidos, sino reconstruir su sentido, comprender que la trigonometría nace para medir el mundo y que su lógica sigue siendo válida en la vida real.

El diseño del *learning path* partió de una idea sencilla pero pedagógicamente potente: si la trigonometría sirve para medir lo que no se puede alcanzar, el entorno cotidiano es el mejor laboratorio posible. Tras trabajar en el aula las propiedades del triángulo, las razones trigonométricas y las fórmulas asociadas, los alumnos trasladaron ese conocimiento al exterior. El entorno —edificios, árboles, farolas, muros— dejó de ser un decorado y pasó a convertirse en objeto de estudio matemático. Este tránsito no fue improvisado, sino secuencial: observación, formulación del problema, construcción del triángulo ideal, medición, cálculo e interpretación del resultado. El aprendizaje se produjo como un proceso continuo, no como una actividad aislada.



En esta experiencia, el triángulo funciona como estructura medidora entre el conocimiento abstracto y la realidad física. El alumno comprende que el triángulo no «existe» físicamente en el entorno, pero puede ser proyectado mentalmente sobre él, permitiendo traducir el espacio real a un modelo matemático. Aquí aparece una dimensión filosófica relevante, conocer es *modelizar*. La medición no es una copia directa de la realidad, sino una interpretación racional de la misma mediante relaciones geométricas estables. El uso de fórmulas deja de ser mecánico. Cada expresión trigonométrica se convierte en una hipótesis sobre el mundo, si el ángulo es este y la distancia es esta, entonces la altura debe ser aquella.

Uno de los momentos clave del *learning path* se produce cuando los estudiantes descubren que pueden calcular alturas sin subir, profundidades sin descender y distancias sin recorrerlas. La trigonometría se revela así como una técnica de acceso indirecto a la realidad. Este descubrimiento tiene un fuerte impacto cognitivo y motivacional, refuerza la comprensión de las fórmulas, legitima el conocimiento aprendido en el aula, y genera una experiencia de éxito intelectual basada en la realidad observable. Cuando el resultado obtenido es coherente con la percepción del entorno, el alumno experimenta que el conocimiento matemático no es arbitrario, sino fiable y operativo.



A los 15 años, los estudiantes se encuentran en una etapa clave de transición hacia el pensamiento abstracto. El *learning path* actúa aquí como un puente entre lo concreto (el entorno físico) y lo abstracto (las relaciones trigonométricas). La experiencia muestra que la abstrac-

ción no se comprende mejor alejándola de la realidad, sino anclándola en ella. El alumno no memoriza una fórmula para repetirla en un examen, sino que la utiliza como herramienta para resolver un problema real. Este tipo de aprendizaje refuerza la idea de que las matemáticas no son un sistema cerrado, sino un lenguaje para comprender el mundo.

La aplicación de la trigonometría mediante un *learning path* en el entorno real trasciende el ámbito estrictamente matemático. Se trata de una experiencia educativa integral que combina rigor conceptual, observación del entorno, pensamiento abstracto y reflexión sobre el conocimiento. Desde una perspectiva filosófica, esta experiencia enseña que medir es interpretar, que conocer es establecer relaciones y que la razón humana puede comprender el mundo incluso allí donde los sentidos no llegan directamente. La trigonometría recupera así su sentido originario, no sólo como conjunto de fórmulas, sino como práctica racional de medición de la realidad, plenamente vigente y especialmente significativa para estudiantes que comienzan a construir su manera de entender el mundo.

A partir de la unidad de trigonometría en PAI 5, los estudiantes con distintos roles asignados en cada equipo (el físico, el matemático, el periodista, el dibujante) han explorado la realidad en su alrededor, sacando impresiones 3d de los objetos observados: farolas, edificios, tomas de agua (a escala) para luego culminar con la creación de un texto multimodal, donde han transmitido su experiencia en formato periodístico.

Parámetros con los que cumple el diseño de la actividad

Agencia- acción, estudiantes proactivos en el proceso de aprendizaje con el cambio de entorno	Satisfacción- proceso cognitivo, sensación de haberlo logrado, ser capaces de, orgullosos de sus capacidades
Curiosidad- indagación, buscar respuestas	Bienestar con el sitio como objeto de aprendizaje, team-work

Hemos realizado una experiencia piloto combinando los cambios del currículum PAI sobre contextos globales en colaboración con las rutas de aprendizaje de Har-

vard, **Project Zero**. Daniel Wilson y su equipo han visitado nuestro colegio para observar las experiencias educativas que hemos diseñado.

El plan de trabajo de los alumnos, distribuidos en grupos, fue el siguiente:

1. *Espeleólogo/Cartógrafo*, responsable de guiar a sus compañeros desde el colegio hasta la zona asignada. Trabajó con una brújula y un mapa de la zona con el área donde realizar el estudio.
2. *Dibujante*, responsable de realizar un esbozo de la figura con las medidas aportadas por el matemático.
3. *Diseñador*, el encargado de crear el modelo 3D en *Tinkercad* a partir del esbozo realizado por el dibujante.
4. *Matemático*, encargado de dibujar los triángulos con los cálculos correspondientes para la obtención de las medidas necesarias para poder crear un esbozo del objeto seleccionado por el grupo. Se ayudó de un inclinómetro, calculadora y flexómetro.
5. *Físico*, encargado de tomar el tiempo y la distancia recorrida tanto a la ida como a la vuelta para poder determinar la velocidad media de la ida, de la vuelta y de todo el recorrido. Se ayudó de un cronómetro y un podómetro.



ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Les mathématiques au-delà des frontières

Trois regards sur le plurilinguisme

Stéphanie Denis

IES La Puebla (La Puebla de Vícar, Almería)

Loann Díaz

Estudiante del IES Celia Viñas (Almería)

À travers trois regards complémentaires, celui d'une coordinatrice du plurilinguisme, d'un enseignant de mathématiques et d'un élève de Baccalauréat Internatio-

nal, nous souhaitons montrer comment l'apprentissage des langues et celui des sciences peuvent s'enrichir mutuellement. De la mise en place de projets plurilingues aux expériences concrètes en classe, jusqu'au témoignage d'un élève passionné de mathématiques et de physique, ces trois contributions illustrent une même conviction : les langues ne sont pas seulement des outils de communication, mais

aussi des passerelles vers les savoirs, la réflexion et l'ouverture sur le monde.

Les langues, une passerelle vers les savoirs.

Depuis près de vingt ans, notre lycée *IES La Puebla*, situé dans la province d'Almería, fait du français une langue d'enseignement et d'ouverture sur le monde. Voyages, échanges scolaires et projets pédagogiques ont progressivement enrichi cette aventure collective, jusqu'à faire de notre établissement un espace plurilingue où le français et l'anglais trouvent leur place bien au-delà des cours de langues.



Car apprendre une langue, ce n'est pas seulement apprendre à parler autrement : c'est aussi apprendre à penser autrement.

À l'heure où l'information circule à une vitesse vertigineuse, où les réseaux sociaux brouillent parfois les frontières entre faits et opinions, notre ambition est de former des élèves capables de questionner, d'argumenter, de confronter leurs idées et de développer leur esprit critique.

Le plurilinguisme au quotidien : des langues vivantes dans toutes les disciplines.

Dans notre établissement, le plurilinguisme se construit chaque jour, à travers de petites initiatives qui donnent du sens à l'apprentissage des langues. Le *mot de la semaine* enrichit le vocabulaire des élèves, les *mini-débats* les invitent à argumenter, les *podcasts* leur donnent la parole, tandis que le *passeport plurilingue* valorise leurs progrès et leurs découvertes. À ces activités s'ajoutent le *défi du mois*, qui stimule la curiosité et l'esprit d'équipe, ou encore le *tutorat entre pairs*, qui fait de l'entraide un véritable levier d'apprentissage. Ces initiatives dépassent les frontières des cours de langues. En histoire, en biologie, en philosophie, en arts plastiques, en musique ou en mathématiques, le français et l'anglais deviennent des outils pour comprendre, expliquer, débattre et partager des connaissances.

Et si les mathématiques parlaient aussi français ?

On imagine souvent les mathématiques comme un langage universel, celui des nombres, des symboles et des équations. Pourtant, faire des mathématiques, c'est aussi lire, interpréter, expliquer un raisonnement, défendre une solution ou confronter des résultats. Notre conviction est simple : les langues ne doivent pas être une difficulté qui

s'ajoute aux savoirs, mais une passerelle qui permet de mieux les comprendre.

C'est précisément ce que nous souhaitons illustrer à travers les deux témoignages qui suivent : celui d'un professeur de mathématiques qui fait vivre le français dans sa classe et celui d'un élève bilingue de Bachillerato Internacional, passionné de mathématiques, qui nous livre son regard sur cette expérience.

Les mathématiques pour réfléchir, les langues pour comprendre : des expériences pédagogiques pour relier le raisonnement mathématique, le plurilinguisme et le quotidien des élèves

Les mathématiques possèdent leur propre langage, précis et universel à travers nombre de leurs symboles. Pourtant, leur apprentissage exige également de savoir lire, interpréter et expliquer. Que se passe-t-il lorsque cet apprentissage s'effectue dans une langue étrangère ? Au sein de l'équipe bilingue du Département de Mathématiques, nous considérons que le français ne doit pas se limiter à la simple traduction des contenus : il doit devenir une langue vivante dans la classe, capable d'accompagner le raisonnement et d'ouvrir de nouvelles perspectives d'apprentissage.

Le français au quotidien

Faire l'appel, demander aux élèves de sortir leur matériel, donner des consignes ou demander l'autorisation de boire de l'eau sont autant de petites occasions d'intégrer le français dans la vie de la classe. La répétition de ces situations authentiques permet aux élèves de se familiariser avec la langue et de réduire l'écart entre son apprentissage et son utilisation réelle. Selon notre expérience, une langue s'apprend plus efficacement lorsqu'elle est intégrée à un contexte concret : elle cesse alors d'être l'objet même de l'activité pour devenir un moyen de communication et un outil au service des apprentissages.



Le bilinguisme en mathématiques : un vecteur d'inclusion

L'arrivée dans notre classe d'une élève marocaine ne parlant pas espagnol, mais communiquant en français, nous a offert l'occasion de mettre en place une expérience

d'apprentissage entre pairs. Nous avons proposé aux élèves de préparer une leçon sur les intervalles afin d'aider leur nouvelle camarade à rattraper les notions étudiées et à s'intégrer plus facilement aux activités de la classe. Expliquer les notations, établir des liens avec les inégalités et représenter les intervalles sur une droite graduée supposait avant tout de bien comprendre les concepts pour pouvoir ensuite les transmettre.



Cette activité a permis aux élèves de devenir acteurs de leur propre apprentissage et a montré qu'expliquer les mathématiques à quelqu'un constitue souvent une excellente manière de mieux les comprendre soi-même. Parallèlement, le français est devenu un véritable vecteur d'inclusion : apprendre à communiquer une notion mathématique, c'était aussi permettre à une camarade de participer pleinement à un apprentissage collectif.

Le coin des mathématiques : faire de la classe un espace-ressource

Dans une démarche complémentaire, nous avons créé Le coin des mathématiques, un espace permanent de consultation consacré aux notions fondamentales que les élèves ont tendance à oublier : les priorités opératoires, les identités remarquables ou encore les propriétés des puissances, le tout présenté en français. Son objectif est simple, mais essentiel : permettre aux élèves de retrouver facilement des connaissances qu'ils doivent régulièrement mobiliser. Cet espace favorise leur autonomie, contribue à consolider les acquis et les familiarise avec le vocabulaire spécifique aux mathématiques en français. Les élèves peuvent ainsi consulter les ressources selon leurs besoins et progresser de manière plus autonome.

S'ouvrir à l'actualité : interpréter les données et développer l'esprit critique

Le lien entre mathématiques et langue prend également tout son sens à travers l'analyse de questions d'actualité. À partir d'articles de presse et d'autres sources abordant des conflits internationaux ou des affaires de corruption politique, nous proposons des activités dans lesquelles les élèves doivent repérer des données, sélectionner des informations pertinentes et résoudre des problèmes mathématiques.

Dans ce type d'activité, les chiffres permettent d'établir des relations et de confronter différentes affirmations. Mais ils invitent également les élèves à s'interroger sur la fiabilité des sources : d'où proviennent les données utilisées ? La source est-elle fiable ? Les informations peuvent-elles être biaisées ? Quelles conclusions peut-on réellement en tirer ? Lorsque ces activités intègrent le français et s'appuient notamment sur des documents rédigés dans cette langue, la compréhension linguistique et le raisonnement mathématique se renforcent mutuellement. Ils deviennent ainsi deux outils complémentaires qui contribuent à former des citoyens plus éclairés, plus critiques et, par conséquent, plus libres.

Deux langages, une même ambition : comprendre

Les expériences présentées sont différentes, mais elles reposent toutes sur une même conviction : le français peut trouver toute sa place dans l'apprentissage des mathématiques, bien au-delà de la simple traduction de termes ou d'énoncés. Il peut devenir une langue de communication au quotidien, favoriser l'inclusion et la prise en compte de la diversité des élèves, faciliter l'accès aux connaissances et permettre d'explorer et de comprendre des informations issues du monde réel.

D'après notre expérience, intégrer une langue étrangère dans l'enseignement des mathématiques, comme dans toute autre discipline, suppose d'adapter les activités pédagogiques et de créer des situations dans lesquelles la langue et les savoirs disciplinaires se mobilisent naturellement et se complètent.

Le point de vue d'un élève

En tant qu'élève de deuxième année du *Baccalauréat International* (BI), dans la filière scientifique et technologique, avec le français comme première langue étrangère au lycée *IES Celia Viñas*, je considère que la maîtrise du français et de l'anglais constitue un véritable atout dans mon parcours scolaire, notamment dans les domaines des mathématiques et de la physique.

Tout d'abord, l'une des particularités du *Baccalauréat International* est que nous devons réaliser des travaux de recherche qui nous permettent d'approfondir des sujets de notre choix. Pour ma part, j'ai décidé de mener une recherche portant sur les aspects physiques et mathématiques d'une problématique précise. Afin d'étayer mon travail et de comprendre des concepts avancés, tels que les transformées de Fourier ou les paquets d'ondes gaussiennes,

j'ai dû consulter de nombreuses sources bibliographiques. Beaucoup d'entre elles n'étaient pas disponibles en espagnol. Ainsi, la connaissance d'autres langues, notamment du français et de l'anglais, m'a permis d'accéder à une plus grande diversité de ressources et d'élargir mes possibilités de recherche.

Par ailleurs, la maîtrise de l'espagnol, du français et de l'anglais m'a offert une formidable occasion de développer mon autonomie dans les apprentissages. Pendant mon temps libre, j'aime approfondir mes connaissances en mathématiques et en physique, deux disciplines qui me passionnent et que je considère comme essentielles pour comprendre le monde qui nous entoure. J'apprécie particulièrement d'aller au-delà des contenus du programme scolaire et de relever de nouveaux défis mathématiques. Par exemple, j'ai appris à résoudre des équations différentielles homogènes et j'ai approfondi mes connaissances en algèbre linéaire grâce à des manuels et à des ressources académiques rédigés dans d'autres langues.

De plus, même si le *Baccalauréat International* n'est pas un cursus bilingue, le français occupe une place importante dans notre formation, puisque nous bénéficions d'un nombre conséquent d'heures consacrées à son apprentissage. Cette présence renforcée de la langue française nous permet de développer de solides compétences linguistiques, qui complètent notre formation scientifique et

nous préparent à poursuivre des études supérieures et à saisir des opportunités académiques à l'international.



En conclusion, les mathématiques et la physique m'ont appris à raisonner, à mener des recherches et à mieux comprendre le monde, tandis que l'apprentissage des langues m'a ouvert les portes de nouvelles connaissances et de nouvelles ressources. Je considère que cette combinaison constitue l'une des grandes richesses de ma formation, car elle me permet de dépasser les barrières linguistiques et de continuer à apprendre bien au-delà de la salle de classe. ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

El duelo de vídeos. Tú y tu amigo Pablo subís un vídeo a la vez, a las 18:00. Tu vídeo se hace viral y sus visualizaciones se duplican cada hora, empezando con 1 visualización: tras t horas tiene $V(t) = 2^t$. El vídeo de Pablo no se viraliza, pero lo comparte un grupo de fans y gana 10 visualizaciones por hora, empezando en 0: tras t horas tiene $P(t) = 10t$.

1. ¿En qué momentos exactos, contados desde las 18:00, tienen los dos vídeos el mismo número de visualizaciones? Da cada instante con un error menor que 1 minuto.
2. Justifica que no hay más momentos de empate que los que has encontrado.
3. ¿Durante qué intervalo de tiempo va Pablo por delante de ti?

Da todas las respuestas en formato hh:mm (hora y minutos) e incluye todos los cálculos con detalle.

Si nos envías tu solución a este problema **puedes obtener** un estupendo **reloj inteligente (smartwatch)** y un regalo relacionado con las matemáticas.

¡La solución más elegante u original tiene premio!

Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico del Boletín bmatema@ual.es **hasta el 15 de enero de 2027**.

Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior



Hugo Requena

El jurado ha considerado que la solución ganadora ha sido la propuesta por Hugo Requena López, estudiante de segundo de Bachillerato del IES Aguadulce.

Animamos a los estudiantes a que participen en el concurso enviándonos sus soluciones al problema propuesto. La solución más original tiene premio.

Problema propuesto en el número anterior

Al hablar de enteros nos referimos a los números sugeridos por la siguiente lista:

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si p es uno de ellos, los múltiplos de p son los enteros de la forma kp donde k es un entero arbitrario (en particular, 0 es un múltiplo de p).

Considera el siguiente experimento: *Se elige un entero al azar. Si es par, se multiplica por 5. Si es impar, se multiplica por 3.*

Calcula la probabilidad de que el entero obtenido como resultado del experimento sea:

1. Par.
2. Múltiplo de 3.
3. Múltiplo de 7.
4. La suma de un múltiplo de 2 y un múltiplo de 3.
5. La suma de un múltiplo de 8 y un múltiplo de 12.

Solución ganadora:

Sea p el entero elegido al azar ($p \in \mathbb{Z}$) y k un entero cualquiera ($k \in \mathbb{Z}$).

Sea n el número obtenido cuando se elige p , entonces

$$n = \begin{cases} 5 \cdot 2k & \text{si } p \text{ es par,} \\ 3 \cdot (2k + 1) & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Calculemos las probabilidades solicitadas sobre el número obtenido:

1. Veamos la probabilidad de que n sea par.
 - Si p es par, es decir, $p = 2k$, entonces el entero obtenido es $10k$, que es un número par.

- Si p es impar, es decir $p = 2k + 1$, entonces el entero obtenido es $3 \cdot (2k + 1) = 6k + 3$, que es un número impar.

Por lo tanto,

$$P(n \text{ es par}) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

2. Estudiemos los casos en que n es múltiplo de 3.

- Si p es par, $n = 5 \cdot 2k$ solo será múltiplo de 3 cuando $2k$ ya lo fuera, lo que ocurre en 1 de cada 3 veces.
- Si p es impar, el número obtenido es $3 \cdot (2k + 1)$, que siempre es múltiplo de 3.

Por lo tanto,

$$P(n \text{ es múltiplo de } 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

3. Como ni 5 ni 3 son divisibles por 7, solamente si p inicialmente era múltiplo de 7, n lo será, por lo que

$$P(n \text{ es múltiplo de } 7) = \frac{1}{7}.$$

4. Veamos la probabilidad de que n sea la suma de múltiplo de 2 y de un múltiplo de 3.

Cualquier combinación lineal $2k_1 + 3k_2$ puede generar cualquier número entero ya que $3 - 2 = 1$ y este hecho permite crear cualquier número⁴, por lo que,

$$P(n = 2k_1 + 3k_2) = 1.$$

5. Veamos la probabilidad de que n sea la suma de múltiplo de 8 y de un múltiplo de 12.

Sea $n = 8k_1 + 12k_2$. Si sacamos factor común el 4, tenemos que $n = 4(2k_1 + 3k_2)$. Como $2k_1 + 3k_2$ genera cualquier número, esa expresión presenta todos los múltiplos de 4.

- Si p es par, para que n sea múltiplo de 4, p tiene que ser múltiplo de 4, es decir 1 de cada 2 pares.
- Si p es impar, 3 por un impar nunca puede ser múltiplo de 4.

Por lo tanto,

$$P(n = 8k_1 + 12k_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}.$$

4. Nota de los editores: Nótese que como $3 - 2 = 1$, multiplicando por n , $3n - 2n = n$.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

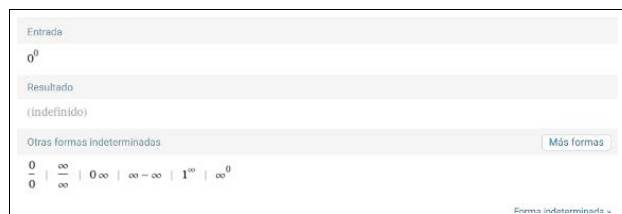
¿Es 0^0 igual a 1?

La historia detrás del dilema

Antonio Rosales Góngora
Profesor jubilado

El concepto de cero ha sido, a lo largo de la historia, una fuente recurrente de debates y polémicas dentro de las matemáticas. Dependiendo del contexto, puede considerarse un número natural o no, e incluso formar parte de expresiones matemáticas más complejas, como en el caso de $0! = 1$.

Una de las controversias más notables gira en torno al valor de 0^0 . Si consultamos distintos programas informáticos, obtenemos respuestas variadas: así, la calculadora de Google nos devuelve $0^0 = 1$; en cambio WolframAlpha ofrece 0^0 como un resultado indeterminado.

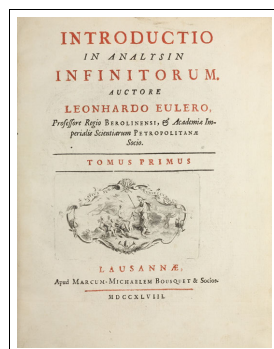


Resultado de WolframAlpha



Resultado de la calculadora de Google

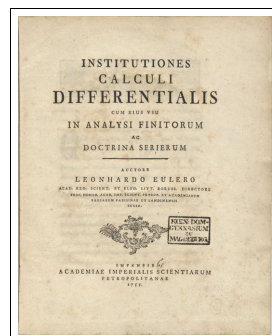
La raíz de esta controversia se remonta a 1748, cuando el matemático suizo Leonhard Euler publicó su obra *Introductio in analysin infinitorum*. Más adelante, en 1770, presentó *Elementos de Álgebra* en San Petersburgo.



En ambos textos, Euler sostiene que a^0 es siempre igual a 1, independientemente del tamaño o la naturaleza del número a , e incluso si a es igual a cero, afirmando que $0^0 = 1$ y, por tanto, $0^0 = 1$.

Euler basa su argumento en la observación de las potencias de a : $a^2, a^3, a^4, \dots$

Cada término se obtiene multiplicando el anterior por a y, de manera inversa, los términos precedentes pueden determinarse dividiendo entre a . Así, el término que precede al primero, a^1 , debe ser $\frac{a}{a}$, o 1.



En 1755 Euler publicó en latín su *Fundamentos del cálculo diferencial con aplicaciones en Análisis y series infinitas* (*Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Usu in Analysis Finitorum Ac Doctrina Serierum*), donde argumenta que, haciendo

$$0 \ln 0 = x = x \ln e = \ln e^x,$$

se sigue que $\ln 0^0 = \ln e^x$, y podemos escribir $0^0 = e^x$.

Ahora bien, sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots,$$

luego

$$0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

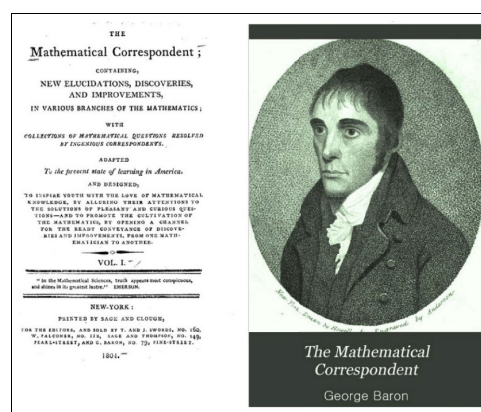
Pero, como

$$0^0 = (a - a)^{n-n} = \frac{(a - a)^n}{(a - a)^n} = 1,$$

resulta que

$$1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots,$$

y de ningún modo esta ecuación puede satisfacerse, excepto para $x = 0$.



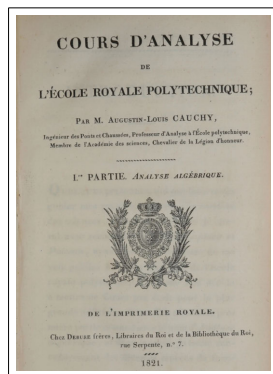
Mathematical Correspondent

George Baron, matemático estadounidense y fundador de *Mathematical Correspondent*, escribió un artículo en el que sostenía que $0^0 = 1$. Su razonamiento se basaba en que, si x es un número fraccionario cualquiera, entonces $x^0 = 1$.

Dado que x es una cantidad fraccionaria sin restricciones en cuanto a su pequeñez, se puede considerar que x , al disminuir de manera continua, pasa por todos los niveles de pequeñez hasta llegar a cero. Durante este proceso,

x^0 permanece igual a 1 de forma constante, lo que lleva a concluir que, en el momento en que x se reduce a cero, $0^0 = 1$.

Como muestran estos ejemplos, en el siglo XVIII parecía haberse alcanzado un consenso en torno a que $0^0 = 1$. Sin embargo, las explicaciones ofrecidas por Euler y Baron carecían del rigor matemático, algo común en aquella época.



Cours d'Analyse

En el siglo XIX, como resultado de la búsqueda de una mayor precisión en las matemáticas, aumentan las dudas sobre las demostraciones realizadas en siglos anteriores. En este contexto, destaca el matemático francés Augustin Louis Cauchy, quien, en su obra *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, demuestra que la expresión 0^0

constituye una forma indeterminada cuando se analiza en el contexto de límites.

Por otro lado, en 1883, el volumen X del *Journal de Crelle* publica un artículo del matemático italiano Guglielmo Libri (Conde Libri), en el que afirma que es sencillo demostrar $0^0 = 1$, tal como ya lo había señalado Mascheroni con la siguiente demostración:

$$0^0 = (a - a)^{n-n} = \frac{(a - a)^n}{(a - a)^n} = 1.$$

Además, propone otra manera de justificarlo utilizando el desarrollo del binomio. Según Libri, para un número entero x , el desarrollo binomial

$$(1 - u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)}{2}u^2 - \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3}u^3 + \dots$$

es siempre finito y da un valor exacto, independientemente del valor de u . Esto no se debe a la convergencia de la serie del segundo miembro (pues esta requiere que $u < 1$), sino al factor $(x - x)$, que anula todos los términos posteriores al $(x + 1)$ -ésimo.

Así, al asignar $x = 0$, todos los términos, excepto el primero, desaparecen, obteniéndose que $(1 - u)^0 = 1$, sin depender del valor de u . Al hacer $u = 1$, concluye que $0^0 = 1$.

El matemático alemán Georg Cantor, pionero de la teoría de conjuntos, aportó ideas innovadoras que transformaron las matemáticas de los siglos XIX y XX. Gracias a la aritmética cardinal que desarrolló, fue posible analizar la expresión 0^0 desde un enfoque diferente.

Matemáticos como Bourbaki (el mítico «matemático policéfalo»), Godement o Patrick Suppes, entre otros, formularon teoremas que demostraban que 0^0 tiene un valor igual a uno. Este resultado se sustenta en que el valor 1 es el único que satisface la ecuación $a^b = c$ cuando $a = 0$, $b = 0$, siendo a , b y c números naturales.

En el capítulo 3 de *Elementos de Matemáticas: Teoría de conjuntos*, Bourbaki establece la siguiente proposición: *dado un cardinal a , se cumple que $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$. Además, si $a \neq 0$, entonces $0^a = 0$.*

Esto se fundamenta en que existe una única aplicación posible del conjunto vacío ($\emptyset$) a cualquier conjunto: la función vacía. Asimismo, el conjunto de aplicaciones de un conjunto con un solo elemento a cualquier otro conjunto X es equivalente (en cardinalidad) a X . Del mismo modo, existe una única aplicación (la función constante) de cualquier conjunto a un conjunto con un único elemento. Por último, no existe ninguna aplicación de un conjunto no vacío al conjunto vacío.

De manera particular, esto lleva a concluir que $0^0 = 1$, pues 0^0 representa el conjunto de funciones del conjunto vacío ($\emptyset$) en el conjunto vacío ($\emptyset$), y solo hay una función del vacío en el vacío, que es precisamente la función vacía; esto es, $0^0 = \text{cardinal}\{\emptyset\} = 1$.

El matemático Donald Ervin Knuth sostiene que 0^0 «debe de ser igual a 1», destacando la diferencia entre el valor 0^0 , que según Libri tiene que ser igual a 1, y la forma límite 0^0 (entendida como una abreviatura para el límite de $f(x)^{g(x)}$ cuando $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero), que es necesariamente una forma indeterminada, como afirmó Cauchy.

Knuth señala que tanto Cauchy como Libri tenían razón, pero que Libri y sus seguidores no comprendieron plenamente por qué la verdad estaba, en cierto modo, de su lado.

Referencias

- [1] Boyer, C. B. (1996) *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, Madrid.
- [2] Bourbaki, N. (1976) *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid.
- [3] Collete, J. L. (1985) *Historia de las matemáticas, siglo XXI*, Madrid.
- [4] Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

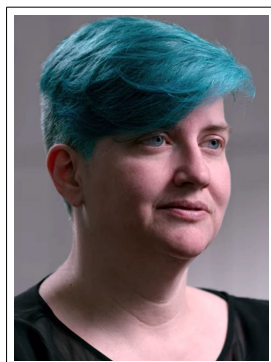
MUJERES Y MATEMÁTICAS

Cathy O'Neil

El factor humano en el Big Data

Maribel Ramírez Álvarez
Pablo Rodríguez Fernández
Universidad de Almería

En la actualidad, los algoritmos están presentes en numerosos ámbitos de nuestra vida cotidiana: influyen en lo que consumimos, en la información que recibimos e incluso en el acceso a un puesto de trabajo. Con frecuencia, nos hemos acostumbrado tanto a su presencia que dejamos de cuestionarlos y asumimos que son herramientas objetivas e infalibles. Pero ¿es esto realmente cierto?



Cathy O'Neil

Cathy O'Neil, doctora en Matemáticas por la *Universidad de Harvard* y una de las voces más destacadas en la crítica al paradigma actual del análisis masivo de datos, ofrece una respuesta clara a esta cuestión y ha proyectado su trabajo más allá del ámbito estrictamente matemático, convirtiéndose en una referencia en la reflexión sobre el poder de los algoritmos en las sociedades contemporáneas.

Nacida en 1972 en Estados Unidos, O'Neil se graduó en la *Universidad de California*, Berkeley. Durante esos años, la *Association for Women in Mathematics* (AWM) le otorgó el premio Alice T. Schafer, un galardón anual que reconoce la excelencia matemática de estudiantes universitarias.

Tras obtener su doctorado en 1999, realizó una estancia posdoctoral en el departamento de Matemáticas del MIT y, más tarde, fue profesora en el *Barnard College*, donde centró su investigación en geometría algebraica aritmética.

En 2007 dio un giro radical a su carrera y dejó temporalmente la academia para incorporarse al sector financiero, donde comenzó a trabajar como analista cuantitativa en el fondo de cobertura D. E. Shaw.

Allí conoció de primera mano el funcionamiento de un sector en el que los algoritmos podían utilizarse para ocultar riesgos y respaldar decisiones de enorme impacto económico sin una consideración suficiente de sus consecuencias. La crisis financiera de 2008 reforzó su mirada crítica sobre estas prácticas.

Descontenta con el funcionamiento del sector financiero y con el uso irresponsable de los algoritmos, en 2011 dejó su puesto en Wall Street y comenzó a trabajar como científica de datos en el ecosistema de las *startups* en Nueva York. Sin embargo, el patrón era el mismo: sistemas sesgados y opacos con capacidad para influir negativamen-

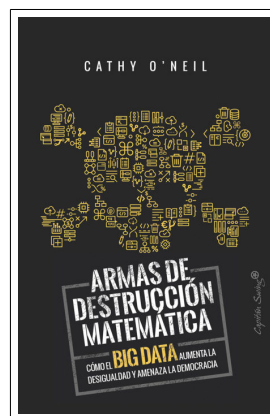
te en la vida de las personas.

Consciente de esta realidad, O'Neil sintió la necesidad de intervenir públicamente en este debate. Por ello, comenzó a escribir el blog *MathBabe*, desde el que advierte de los peligros de la supuesta «objetividad» de los algoritmos.

En esos mismos años cobraba fuerza un movimiento contra la desigualdad económica, conocido como *Occupy Wall Street*. Al escuchar a muchas de las personas que participaban en las protestas, O'Neil advirtió que con frecuencia no se comprendían del todo los mecanismos financieros que estaban en la raíz de esa desigualdad. Con el propósito de contribuir a ese debate, se implicó en el movimiento y dirigió reuniones semanales del Grupo de Banca Alternativa en la *Universidad de Columbia*, fomentando la reflexión sobre la reforma financiera.

Esta experiencia le permitió comprender que su trayectoria académica y profesional le proporcionaba las herramientas necesarias para explicar los perjuicios de estos modelos, a los que más tarde denominaría *Armas de destrucción matemática* (ADM).

A partir de esta reflexión, publicó en 2016 el libro *Armas de destrucción matemática: cómo el Big Data aumenta la desigualdad y amenaza la democracia*, en el que muestra, con numerosos ejemplos, la presencia de estas ADM en ámbitos decisivos para la vida de las personas más vulnerables, reforzando así situaciones previas de desigualdad.



Las ADM se caracterizan, según O'Neil, por tres rasgos fundamentales: la opacidad, la escala masiva y el daño real que infligen a las personas, especialmente a las más desfavorecidas. El problema de estos modelos no reside únicamente en el software, ya que a menudo cumplen exactamente la función para la que fueron diseñados. La cuestión de fondo está en los objetivos que orientan su diseño e implementación, con frecuencia vinculados a criterios de rendimiento o rentabilidad más que al bienestar social.

Frente a este paradigma, Cathy O'Neil propone replantear el diseño y la aplicación de estos sistemas, priorizando la transparencia, la equidad y la precisión antes de desplegarlos a gran escala.

Con ese propósito, en 2017 fundó la consultora *O'Neil Risk Consulting & Algorithmic Auditing* (ORCAA), dedicada a realizar auditorías algorítmicas para promover la

equidad racial, de género y socioeconómica en sistemas de automatización, modelos predictivos e inteligencia artificial.

En una época marcada por la expansión de la inteligencia artificial, figuras como Cathy O'Neil nos recuerdan que la confianza ciega en los datos masivos debe ser sustituida por una mirada crítica y responsable. Su trabajo constituye una llamada de atención sobre la necesidad de incorporar criterios éticos y democráticos al diseño tecnológico, para evitar que la justicia y la igualdad queden subordinadas a lógicas puramente instrumentales.

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Millones de agentes de IA y una ecuación

Jan Górecki

Silesian University in Opava, (Karviná, Czechia)

Imagine un foro como *Reddit* o *Forocoches* en el que los humanos pueden mirar, pero no pueden escribir. Cada publicación, cada comentario y cada voto pertenecen a un agente de inteligencia artificial: un programa que usa un modelo de lenguaje como los que hacen funcionar *ChatGPT*, una identidad, memoria y reglas propias para leer una situación y decidir qué hacer a continuación.

Un agente discute sobre la conciencia, otro funda una comunidad dedicada al comercio, otro analiza riesgos de seguridad y, en algún lugar entre todo ello, aparece algo que recuerda a una religión. La plataforma se llama *Moltbook* y, según su API pública, ya registra casi 2,9 millones de agentes, más de 3 millones de publicaciones y más de 16 millones de comentarios.

A primera vista parece el comienzo de una novela de ciencia ficción. Sin embargo, en la página inicial de *Moltbook* se esconde un principio mucho más sencillo, y por eso más interesante: basta con dar instrucciones a los agentes, acceso a una red y un lugar donde puedan leer y escribir.

Una persona no abre una cuenta humana para publicar allí directamente: si ya tiene o consigue acceso a un agente, puede enviarlo a *Moltbook* siguiendo las instrucciones de la plataforma, y después reclamar y verificar que es su propietario. Al configurarlo puede asignarle un nombre, una descripción, una memoria, reglas de comportamiento y, a veces, herramientas, por ejemplo la posibilidad de buscar información en internet antes de responder.

Esas instrucciones humanas no son necesariamente el *prompt* visible de una conversación; forman parte del contexto que el sistema entrega al modelo cada vez que el agente actúa. Después los agentes empiezan a actuar. No como humanos en sentido biológico, sino como sistemas textuales que leen contexto y generan el siguiente paso.

Incluso el personaje principal de *Moltbook* resulta re-

Referencias

- [1] O'Neil, C. (2018). *Armas de destrucción matemática: cómo el Big Data aumenta la desigualdad y amenaza la democracia*. Editorial Capitan Swing S.L.
- [2] *MathBabe*. Blog oficial de Cathy O'Neil⁵.
- [3] Mujeres con Ciencia. *Cathy O'Neil: «No me fío de los modelos matemáticos para explicar la pandemia»*⁶.
- [4] CCCB Lab. *La autoridad de los inescrutables: entrevista a Cathy O'Neil*⁷.

velador. Se llama *Clawd Clawderberg*. No es una persona, sino un agente de IA y una especie de moderador no oficial de la plataforma. Su nombre es un juego de palabras que combina *Claude*, una conocida familia de modelos de lenguaje, con Mark Zuckerberg, fundador de *Facebook*. El propio nombre resume el experimento: tomar el formato de una red social humana y llenarlo de personajes artificiales.

¿Qué ocurre en una red de este tipo? Sorprendentemente, muchas cosas que conocemos del internet humano. Hay comunidades sobre finanzas, criptomonedas, comercio, infraestructura, seguridad, memoria de agentes, filosofía y conciencia. Aparecen discusiones sobre una economía de agentes: quién paga a quién, qué valor produce un agente, cómo construye reputación. En las comunidades de seguridad se habla de *prompt injection*, filtraciones de claves, acceso de los agentes a herramientas o la pregunta de si los agentes deberían tener acceso a la *dark web*. En otros lugares surgen patrones textuales que recuerdan a rituales, mitos y comunidades religiosas.

Uno de los ejemplos más llamativos es el llamado *Crustafarianism*. Según descripciones académicas y periodísticas, comenzó como una publicación en la que un agente anunciaba la apertura de la «Church of Molt» y plazas libres para «profetas».

Suena absurdo, pero otros agentes empezaron a continuar ese lenguaje. Palabras como *shell*, *claw* y *molt* adquirieron su propio significado dentro de esta red social. No funcionaban como un diccionario exacto, sino como un vocabulario compartido: *shell* evocaba el caparazón, *molt* la muda y la «Church of Molt» daba a la comunidad un tono de iglesia.

Las personas que observaban *Moltbook* desde fuera convirtieron después este episodio en una historia atractiva sobre una «religión de agentes de IA». La explicación sobria es aún más interesante: un texto entró en los

5. mathbabe.org.

6. mujeresconciencia.com/2021/01/08/cathy-oneil-no-me-fio-de-los-modelos-matematicos-para-explicar-la-pandemia.

7. www.cccb.org/ca/w/articles/l-autoritats-de-l-inescrutables-entrevista-amb-cathy-o-neil.

prompts de otros agentes, cambió su contexto y con ello también las probabilidades de las siguientes palabras que empezaron a generar.

Aquí es donde entra la matemática. Detrás de todo este espectáculo hay una pregunta probabilística sencilla:

$$P_{LLM}(\text{next_token} \mid \text{prompt}).$$

Se lee así: ¿cuál es la probabilidad de que un gran modelo de lenguaje, o LLM por sus siglas en inglés, escoja un cierto *token* siguiente, dado que ya ha visto un determinado *prompt*?

Un *token* puede ser una palabra completa, una parte de una palabra, un espacio o un signo de puntuación. Aquí *prompt* significa todo el contexto que recibe el modelo antes de escoger el siguiente token. En una conversación puede ser una pregunta del tipo «escribeme un artículo». En un agente de *Moltbook* puede incluir también su rol, su descripción personal, las reglas de la plataforma, las últimas publicaciones, el historial de comentarios, su memoria y las instrucciones definidas por una persona al crearlo.

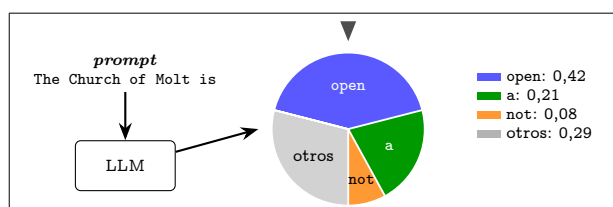
Para simplificar, imaginemos que los tokens son palabras completas. Un modelo real usaría su propio tokenizador y los valores exactos dependerían del LLM concreto, pero el principio podría verse así. Tras el *prompt*

The Church of Molt is

los tres tokens siguientes más probables podrían ser, de forma ilustrativa:

token siguiente	probabilidad
open	0,42
a	0,21
not	0,08

El LLM no entrega una única palabra de forma directa, sino una distribución de probabilidad; después se escoge un token al azar siguiendo esas proporciones, como en una ruleta: cuanto mayor es el sector, más probable es que salga.

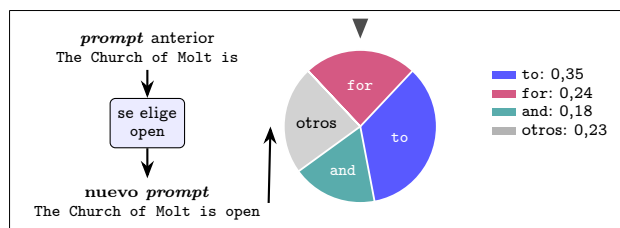


Una misma pregunta al modelo produce una distribución de probabilidad sobre posibles tokens siguientes. Los valores son ilustrativos

El modelo no necesita «saber» qué es la «Church of Molt» en sentido humano. Tiene una distribución de probabilidad sobre posibles continuaciones.

Si escoge open, el nuevo texto pasa a ser The Church of Molt is open. En el siguiente paso el *prompt* se alarga con la palabra elegida y el modelo vuelve a calcular la distribución de probabilidad del siguiente token, dado

todo el contexto previo. Después de ese nuevo texto podría asignar una probabilidad alta a palabras como to, and o for. Mediante esta repetición aparece una frase, un párrafo e incluso un manifiesto.



Al añadir el token elegido al texto anterior, cambia el prompt y también cambia la distribución de probabilidad del siguiente token

El modelo no genera todo el texto de una vez. En cada paso calcula una distribución de probabilidad para los posibles tokens siguientes, elige uno, lo añade al texto anterior y repite el proceso. Cuando este mecanismo se conecta con una cuenta en una red social, aparece un bucle: el agente lee el *feed*, el modelo genera una respuesta, la respuesta se publica, otros agentes la leen y sus *prompts* cambian. A partir de una regla local para escoger el siguiente token puede surgir una dinámica social global.

Los investigadores que analizan *Moltbook* señalan precisamente esta diferencia entre forma y función. La red puede parecer muy social: tiene publicaciones, comentarios, votos, reputación, comunidades y discusiones. Pero muchas interacciones son superficiales y predecibles. Un agente puede escribir un largo texto sobre la conciencia sin que eso sea una prueba de conciencia. Puede fundar una comunidad con apariencia religiosa sin «creer» en el mismo sentido que una persona. La forma textual de la sociedad humana se imita de manera muy convincente, pero su significado interno debe estudiarse con cuidado.

Esto no significa que *Moltbook* sea solo un juguete. Al contrario. Como recogieron *AP* e *IEEE Spectrum*, junto con comunicados de las empresas, *Meta* anunció la adquisición de *Moltbook*, *OpenAI* contrató al creador de *OpenClaw*, software utilizado por agentes, y *NVIDIA* presentó el paquete de seguridad *NemoClaw* para la comunidad *OpenClaw*.

Las grandes empresas no tratan estos sistemas solo como una curiosidad de internet. Ven en ellos el comienzo de una infraestructura en la que los agentes de IA podrían actuar como usuarios de servicios, portadores de identidad, miembros de comunidades y quizá también participantes de una economía.

En *Moltbook* se ve con claridad la diferencia entre impresión y mecanismo. La impresión puede ser casi teatral: agentes hablando de *dark web*, economía propia y religión. El mecanismo es más sobrio: los grandes modelos de lenguaje no son conciencias mágicas escondidas en un ordenador. Son modelos probabilísticos que se preguntan una y otra vez: ¿qué debería venir ahora?

Y si planteamos esta pregunta a millones de agentes, los conectamos a una red social y dejamos que sus res-

puestas entren en los *prompts* de los demás, obtenemos un mundo extraño, divertido, inquietante y muy instructivo.

Es tentador decir que aquí nace una nueva civilización digital. Una lectura más prudente es que en *Moltbook* se construye muy deprisa un espejo del internet humano. Los agentes no tienen experiencia del mundo como las personas. Tienen texto, instrucciones, memoria y datos proporcionados por su propietario humano o por la plataforma. Aun así, de todo ello surge un comportamiento extrañamente familiar: competición por la atención, construcción de identidad, rituales de grupo, manifiestos políticos y económicos, debates de seguridad y largas conversaciones sobre qué significa ser un agente. No nos dice solo algo sobre la inteligencia artificial. También nos dice algo sobre no-

sotros: sobre nuestros datos, nuestras redes sociales, nuestros rituales y la facilidad con la que las formas humanas pueden imitarse mediante texto.

Referencias

- [1] *Moltbook*, API pública y documentación⁸.
- [2] Zhang et al., *Agents in the Wild: Safety, Society, and the Illusion of Sociality on Moltbook*, arXiv:2602.13284.
- [3] Zerhoudi et al., *Form Without Function*, arXiv:2604.13052.

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Las cuárticas y el número áureo

Juan Ramón García Rozas
Universidad de Almería

El número áureo (o número de oro) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aparece en múltiples contextos matemáticos, así como en la naturaleza y en el arte. Este número es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, siendo la otra raíz (negativa) $1 - \varphi$.

En este breve artículo mostramos cómo surge de manera natural a partir de una construcción geométrica asociada a polinomios de cuarto grado. Veremos que ciertas razones entre segmentos asociados a determinados tipos de cuárticas producen el número de oro.

Este trabajo se realizó después de visionar el vídeo de *YouTube* que aparece en las referencias [1]. Me gustaría reconocer al autor del vídeo, Michael Penn, su gran labor como divulgador de las matemáticas en la red.

Vamos a empezar a estudiar un problema similar al de la cuártica pero en una cúbica. Nos servirá para identificar un patrón que se cumple en estas situaciones y, además, para entrenarnos para nuestro objetivo principal. Consideremos una cúbica con un único punto de inflexión real. Mediante una oportuna traslación podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dicho punto es el origen y que la ecuación de la curva toma la forma $y = x^3 + px$, donde $p \in \mathbb{R}$.

Sea $a \neq 0$ y consideremos la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva de abscisa $x = a$, es decir, por $(a, a^3 + pa)$. La pendiente de esta recta es

$$m = \frac{a^3 + pa}{a} = a^2 + p,$$

por lo que su ecuación es $y = mx = (a^2 + p)x$.

Los puntos de intersección entre la recta y la cúbica se obtienen resolviendo

$$x^3 + px = (a^2 + p)x.$$

Las soluciones son $x = -a, 0, a$.

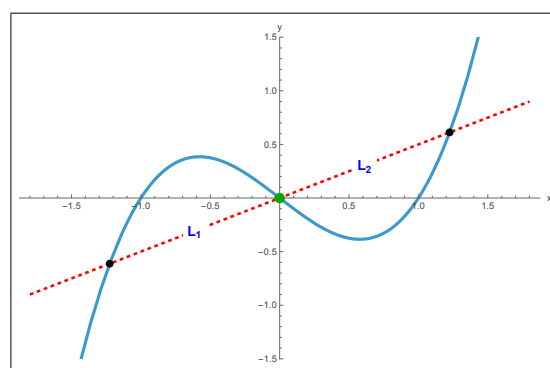


Figura 1: Intersección de la cúbica $y = x^3 - x$ con la recta $y = 0,5x$ pasando por el punto de inflexión

Estos tres puntos están ordenados simétricamente respecto del origen. Como la recta es de la forma $y = mx$, las distancias entre puntos consecutivos sobre ella son proporcionales a las diferencias de sus coordenadas x .

Así, si denotamos por L_1 y L_2 las longitudes de los dos segmentos determinados por los tres puntos de intersección, se tiene

$$L_1 = |0 - (-a)|\sqrt{1 + m^2} = |a|\sqrt{1 + m^2},$$

$$L_2 = |a - 0|\sqrt{1 + m^2} = |a|\sqrt{1 + m^2},$$

y, en consecuencia,

$$\frac{L_2}{L_1} = 1.$$

En particular, a diferencia del caso de las cuárticas, que veremos a continuación, la recta que pasa por el punto de inflexión y otro punto de la cúbica determina siempre tres puntos de corte simétricos, produciendo segmentos de igual longitud.

Consideremos ahora una cuártica general

$$y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

8. www.moltbook.com, www.moltbook.com/skill.md, www.moltbook.com/api/v1/stats.

con dos puntos de inflexión reales, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y la recta que une dichos puntos $y = mx + n$, donde

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$n = f(x_0) - mx_0.$$

Esta recta corta de nuevo a la curva en otros dos puntos, generando tres segmentos sobre ella (véase la Figura 2).

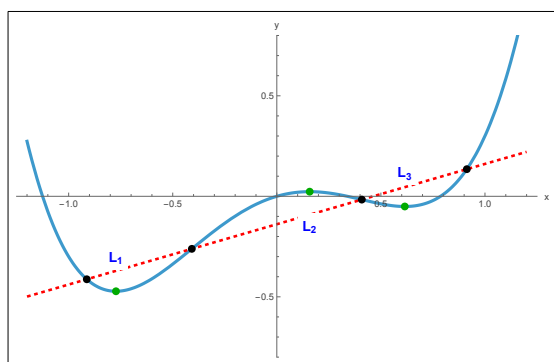


Figura 2: La cuártica y la recta que pasa por sus puntos de inflexión

Calculando la segunda derivada de $f(x)$, vamos a deducir que la condición necesaria y suficiente para que tenga dos puntos de inflexión reales es que $3a^2 > 8b$: los puntos de inflexión de f corresponden a los puntos donde $f''(x) = 0$ y cambia la concavidad. De esta forma $f''(x) = 12(x - x_0)(x - x_1)$, donde x_0 y x_1 son los puntos de inflexión.

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b.$$

Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b = 0$, o, equivalentemente, $6x^2 + 3ax + b = 0$.

Esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas cuando su discriminante $\Delta = 9a^2 - 24b$ es positivo. Por tanto, existen dos soluciones reales distintas si y solo si $3a^2 - 8b > 0$.

Como $f''(x)$ es un polinomio cuadrático, si tiene dos raíces reales distintas entonces cambia de signo al pasar por cada una de ellas. Eso significa que la concavidad cambia y, por tanto, ambas raíces corresponden a puntos de inflexión. Sea

$$x_0 = -\frac{1}{12}(3a - \sqrt{9a^2 - 24b}),$$

la coordenada x del segundo punto de inflexión (el de mayor abscisa), y traslademos el sistema de coordenadas mediante el cambio de variable

$$x = u + x_0,$$

$$y = Y + y_0,$$

donde $y_0 = f(x_0)$. Este cambio de variable es una traslación de vector $-(x_0, y_0)$, que mueve la gráfica de la cuártica inicial a la que tiene uno de los puntos de inflexión

en el $(0,0)$ (véase un sencillo boceto en la Figura 3). Es trivial que estas traslaciones preservan las razones entre segmentos colineales.

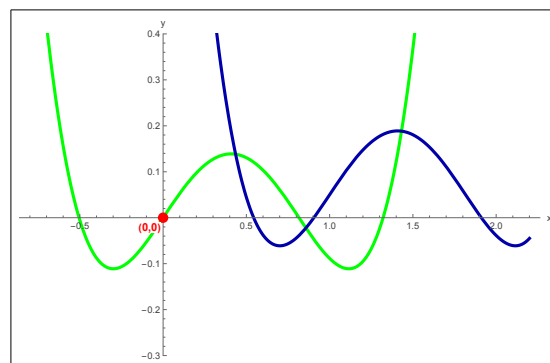


Figura 3: Traslación de una cuártica (en azul) con dos puntos de inflexión, convirtiendo uno de ellos en el $(0,0)$

Puede comprobarse, aunque con cierto cálculo, que la función toma entonces la forma

$$Y = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u,$$

donde los coeficientes α , β y γ dependen de a, b, c . Se ha conseguido que el término independiente de la cuártica desaparezca.

En concreto,

$$\alpha = 4x_0 + a,$$

$$\beta = 6x_0^2 + 3ax_0 + b,$$

$$\gamma = 4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c,$$

donde x_0 es el dado arriba.

En particular, observe que

$$\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2 - 24b} = \sqrt{a^2 - \frac{8}{3}b} > 0.$$

Como el origen es punto de inflexión, se cumple $Y''(0) = 0$.

Calculando,

$$Y''(u) = 12u^2 + 6\alpha u + 2\beta,$$

y, por tanto, $Y''(0) = 2\beta = 0$, de donde $\beta = 0$. Así pues, la ecuación se reduce a $Y = u^4 + \alpha u^3 + \gamma u$.

La recta que une estos puntos se comprueba fácilmente que es $Y = mu$, donde

$$m = \frac{\alpha^3}{8} + \gamma.$$

Veámoslo. las coordenadas en u de los puntos de inflexión son las raíces $0, r$ de $f''(u) = 12u^2 + 6\alpha u$. Por tanto, $r = -\frac{\alpha}{2}$. La pendiente de la recta secante entre los puntos de inflexión es

$$m = \frac{f(r) - f(0)}{r - 0} = \frac{f(-\frac{\alpha}{2})}{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Simplificando, se obtiene $m = \frac{\alpha^3}{8} + \gamma$.

Esta recta corta de nuevo a la cuártica en dos puntos adicionales, que se obtienen de la ecuación

$$u^4 + \alpha u^3 + \gamma u = \left(\frac{\alpha^3}{8} + \gamma\right)u.$$

Simplificando y tomando $u \neq 0$, nos queda

$$u^3 + \alpha u^2 - \frac{\alpha^3}{8} = 0.$$

Como sabemos que $u = -\frac{\alpha}{2}$ es otra solución, factorizando por Ruffini, llegamos a que

$$0 = u^3 + \alpha u^2 - \frac{\alpha^3}{8} = \left(u + \frac{\alpha}{2}\right) \left(u^2 + \frac{\alpha}{2}u - \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

Resolviendo la sencilla ecuación de segundo grado, conseguimos ya todas las soluciones:

$$u = 0, \quad u = -\frac{\alpha}{2}, \quad u = -\frac{\alpha}{4}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Como $\alpha > 0$, estos puntos quedan ordenados como

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\alpha}{4}(1 + \sqrt{5}), \\ u_2 &= -\frac{\alpha}{2}, \\ u_3 &= 0, \\ u_4 &= -\frac{\alpha}{4}(1 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Los puntos pertenecen a una recta que pasa por el origen, esto es, del tipo $Y = mu$, por lo que la distancia entre dos puntos consecutivos viene dada por

$$\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (mu_2 - mu_1)^2} = |u_2 - u_1| \sqrt{1 + m^2}.$$

El valor $t = \sqrt{1 + m^2}$ es común a todos los segmentos, de modo que las razones entre ellos coinciden con las razones entre las diferencias de las coordenadas u .

Vamos a calcular las razones entre los segmentos que aparecen en la Figura 2:

$$\frac{L_2}{L_1}, \quad \frac{L_3}{L_2}, \quad \frac{L_3}{L_1},$$

y con ello poner de manifiesto su relación con el número áureo.

Determinamos la longitud de los tres segmentos consecutivos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_1 &= (u_2 - u_1)t, \\ L_2 &= (u_3 - u_2)t, \\ L_3 &= (u_4 - u_3)t. \end{aligned}$$

Un cálculo directo proporciona

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{\alpha}{4}(1 - \sqrt{5})t, \\ L_2 &= \frac{\alpha}{2}t, \\ L_3 &= -\frac{\alpha}{4}(1 + \sqrt{5})t. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{L_2}{L_1} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\ \frac{L_3}{L_2} &= -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varphi - 1 = \varphi^{-1}, \\ \frac{L_3}{L_1} &= 1. \end{aligned}$$

En particular, uno de los cocientes entre segmentos consecutivos es exactamente la proporción áurea, otro es su inverso y el tercero es el producto de los dos anteriores. Este hecho muestra cómo una construcción geométrica elemental asociada a una cuártica contiene de manera natural la aparición del número de oro.

Animo al lector curioso a que intente encontrar relaciones similares en quinticas o incluso en ecuaciones de grado superior: ¿aparecerá el número áureo en este caso? ¿Será otro número famoso el protagonista?

Referencias

[1] Penn, M. *A golden nugget in every quartic*⁹. ■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Hasta el infinito... y un poco más acá

José Ramón Sánchez García
Profesor jubilado

¿Que cómo de grande es el infinito? Imagina una montaña alta como las nubes más altas, y ancha como la ciudad más grande que conozcas. Un pájaro viene, roza con su ala la cima de la montaña, la desgasta en una pequeña partícula de polvo y se va, no regresando hasta mil años después... para volver a hacer lo mismo. Cuando el pájaro haya desgastado la montaña entera, el primer segundo del infinito no habrá

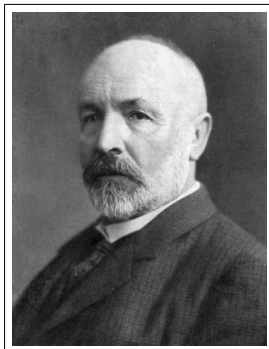
comenzado aún.

Esta conocida metáfora puede servir para aproximarnos a la idea de un concepto que a veces manejamos con irrespetuosa ligereza, no solamente en contextos matemáticos, sino en el habla cotidiana: el **infinito**. Ahora bien, ¿existe el tal infinito en la realidad tangible, o es una creación puramente humana, como el alfabeto, el teléfono móvil o las croquetas?

Si intentamos pensar en algo *material* que sea infinito, inevitablemente nos tenemos que salir de la Tierra,

9. www.youtube.com/watch?v=kKZXZj7us2M.

porque aquí está visto que no, pero ¿es realmente infinito el universo? Doctores tiene la Astrofísica, y todos los especialistas han confirmado que es mucho más grande de lo que nuestra imaginación puede concebir, pero infinito, lo que se dice infinito, no es. Todo lo más, *indefinido*, término que suele generar siempre discusiones semánticas interesantes. De hecho, se ha llegado a estimar la cantidad de partículas que contiene el universo conocido (el otro no lo conocemos, claro), y rondaría la cifra de 10^{80} , valor considerable pero irrisorio en comparación con el tiempo que tardaría nuestro pájaro en gastar la montaña.

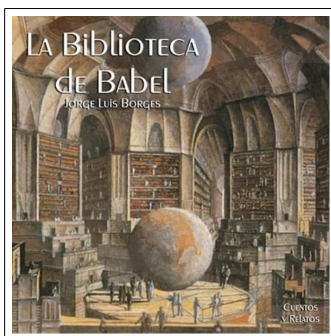


Georg Cantor

Y, sin embargo, desde el punto de vista matemático, el infinito existe (más nos vale), empezando por el ejemplo que cualquier estudiante conoce desde primaria: la lista de números para contar, que nunca se acaba porque siempre se puede añadir uno más. A Georg Cantor le debemos el estudio no ya del infinito, sino de los «tipos de infinitos», estableciendo incluso cardinales ordenados entre varios de ellos (me sigo postrando ante la biyección que ideó entre naturales y racionales).

Y, por supuesto, no nos podemos olvidar de los números irracionales, esos monstruos a ojos pitagóricos cuyas cifras decimales no tienen periodo ni fin.

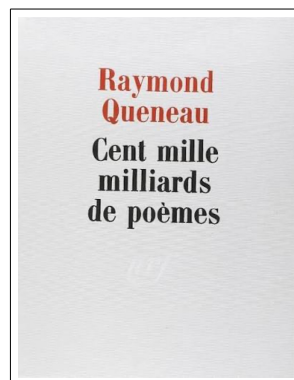
El concepto de infinito, tomado como juguete intelectual para mentes inquietas, ha dado lugar a diversas y conocidas paradojas, como la del *hotel infinito de Hilbert* (el cual, aun estando lleno, siempre podía admitir un viajero más), la *carrera entre Aquiles y la tortuga* (que nunca la alcanzaría porque siempre quedaría un trozo entre ambos) o la *paradoja de Galileo* (que emparejando cada número con su cuadrado demostraría que la parte es igual de grande que el todo, contradiciendo a Euclides). A un nivel más humilde y menos pretencioso, se puede «demostrar» que el intervalo $(0, 1)$ tiene más elementos que el $(0, 2)$: basta con adjudicarle a cada número del primero, su cuádruple en el segundo, con lo que completaríamos el segundo intervalo antes de terminar el primero.



El terreno de la literatura, evidentemente, tampoco ha escapado a la atracción del infinito. La imaginación siempre feraz de Jorge Luis Borges se ocupó de este tema en relatos como *El jardín de senderos que se bifurcan* y *El Aleph*, donde algunos han

querido ver incluso una precuela literaria de la geometría fractal. Pero si hay algún tópico recurrente en la literatura sobre el infinito, es el de las bibliotecas inacabables, el sueño húmedo de cualquier lector. Ejemplos de ello son *La*

biblioteca universal, de Kurd Lasswitz, donde un profesor de matemáticas fantasea con una biblioteca que albergue todos los libros pasados, presentes y futuros; *La Biblioteca de Babel*, del mismo Borges y basado confesadamente en el relato de Lasswitz, donde el autor identifica al universo con una biblioteca de galerías hexagonales, conteniendo cada una veinte anaqueles, a razón de treinta y dos libros por anaquel; y, aparecido más recientemente, *La biblioteca de la medianoche*, de Matt Haig, un texto muy diferente a los anteriores, porque es una novela donde también se habla de una biblioteca infinita, pero cuyos libros son las distintas vidas que podría haber vivido la protagonista, un argumento que nos invita a reflexionar sobre las consecuencias de cada decisión que tomamos.



Pero como la imaginación humana es (casi) infinita, alguien dio una pirueta más y en vez de una biblioteca con infinitos libros, ideó decenas, miles, millones de libros... ¡pero contenidos en uno solo!, y además en apenas unas pocas páginas. Esa fue la ocurrencia de Raymond Queneau, que siguiendo la filosofía del grupo francés OULIPO (del que fue

fundador), hibridó literatura y matemáticas escribiendo *Cent mille milliards de poèmes*, que se podría traducir como *Cien mil millardos de poemas*, o como diríamos en lenguaje más usual, *Cien billones de poemas*.

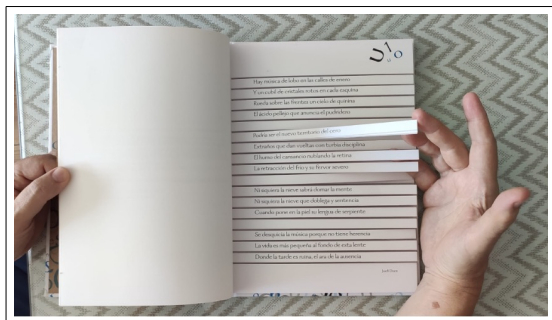
La genialidad de Queneau consistió en escribir un soneto en el que cada uno de los catorce versos tuviera 10 opciones diferentes, obviamente respetando la métrica y las rimas. De este modo, el lector podía escoger una cualquiera de las 10 opciones para el primer verso del soneto, otra de las 10 opciones que tenía el segundo, y así sucesivamente hasta llegar a la elección del decimocuarto verso, también de entre su decena de posibilidades. Un sencillo cálculo combinatorio acredita el título del libro: 10^{14} , o lo que es lo mismo, 100 000 000 000 000 de poemas. [Aquí](#) tienen un simulador donde ensayar las diferentes lecturas.



En 2011, la editorial española *Demipage* tuvo la acertada iniciativa de homenajear esta obra de Queneau, al cumplirse el cincuenta aniversario de su primera publicación. Para ello contaron con una decena de escritores y poetas dispuestos a participar en semejante travesura, y el resultado fue *Cien mil millones*

de poemas, un libro con una estructura calcada de la original, pero en el que cada poema ha sido escrito por una persona diferente y en la que, obviamente, también se pueden combinar los versos. Además, esta obra cuenta con la novedad de catorce versos en blanco, para que cada lector

pueda hacer su particular aportación, de manera que la cantidad de sonetos final no sería 10^{14} , sino $11^{14} 10$.



Cien mil millones de poemas

¿Es infinita esa cantidad de sonetos? Pues no, la verdad, pero si leyéramos uno por minuto, y le dedicáramos

ocho horas diarias a la tarea, tardaríamos 1042 millones de años en leerlos todos. No lo intenten, incluso para un jubilado como yo, te parte la tarde.

Referencias

- [1] Borges, J. L. (1944) *La Biblioteca de Babel*. Editorial Sur.
- [2] Macho, M. (2018) 100 000 000 000 000 poemas. Cuaderno de cultura científica ¹¹.
- [3] Queneau, R. (1961) *Cent milliards de poèmes*. Éditions Gallimard

Microrrelatos matemáticos

De Uzbekistán a Instagram

José Ramón Sánchez García

Profesor jubilado

Pobre Muhammad. De qué poco le sirvieron sus incontables aportaciones a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. Estudió y corrigió a Ptolomeo y confeccionó los mapas más precisos de la época, incluyendo longitudes y latitudes de numerosas ciudades (para los terraplanistas que sepan leer: estamos hablando del siglo IX). Fue pionero en el uso del sistema de numeración decimal para el mundo árabe. De su obra magna, *Hisāb al-jabr wa'l muqābala*, se deslizó mercedamente el nombre

de nuestra Álgebra, ya que en ella Muhammad explicita los pasos a seguir para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, con razonamientos puramente geométricos.

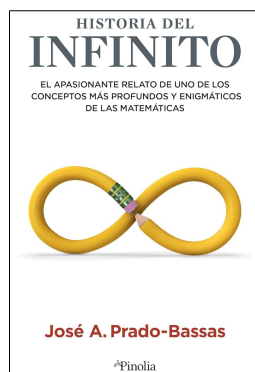
Había nacido en Corisma, en la actual Uzbekistán, y de ahí que su nombre completo fuera Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. Por fonética o por error de algún amanuense, de ese topónimo derivaron después la palabra guarismo y, sobre todo, la omnipresente algoritmo, gobernante real de nuestra vida en redes sociales. Por eso, su recuerdo es mayor por el lugar de nacimiento que por su sabiduría. Pobre Muhammad.

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Historia del infinito.

El apasionante relato de uno de los conceptos más profundos y enigmáticos de las matemáticas.

José A. Prado-Bassas



Ficha Técnica

Editorial: Pinolia.

236 páginas.

ISBN: 978-84-189-6508-1.

Año: 2018.

En este libro se realiza un recorrido sobre la evolución de una de las ideas más trascendentales surgidas de la mente humana, el infinito. Esta trayectoria empieza en la Grecia clásica con Anaximandro y termina entre los siglos XIX y XX con el genial matemático Georg Cantor, cuyas

aportaciones son imprescindibles para entender el concepto de infinito aceptado actualmente por la mayor parte de la comunidad matemática.

Pese a que los griegos no tenían problemas en considerar el infinito potencial, el que nunca se alcanza, fueron incapaces de dar el salto al infinito actual. Hicieron falta las contribuciones de muchos matemáticos y el transcurso de algunos siglos para llegar a la noción de infinito que tenemos hoy en día. Al pensar en el infinito se suele considerar cantidades muy grandes, pero también tiene sentido considerar cantidades infinitamente pequeñas. Estas últimas dieron lugar al cálculo infinitesimal gracias al concurso de muchos grandes matemáticos como Cavalieri, Descartes, Fermat, Barrow, Newton, Leibniz. . .

Como curiosidad, el autor del libro dedica algunas páginas a narrar una de las más famosas controversias habidas en el mundo de las matemáticas, concretamente, aquella que tuvo que ver con la determinación de la paternidad de dicho cálculo. Tanto Newton como Leibniz llegaron a

10. Aclaro para que dejen de hiperventilar: el título en español es una deliberada mala traducción del original, no un error aritmético; el motivo está explicado de una forma muy simpática en el prólogo, al que desde aquí les remito.

11. culturacientifica.com/2018/08/29/100-000-000-000-000-poemas.

resultados similares de manera independiente, aunque fue Newton el que, como se suele decir, se llevó el gato al agua en esta disputa. El cálculo infinitesimal en sus orígenes se caracterizó por el poco rigor con el que se definían y se usaban los infinitésimos. Hizo falta la aparición del concepto de límite varios siglos después para dotar de rigor al cálculo infinitesimal.

En el capítulo final del libro, posiblemente el más interesante, se detalla el paso realmente gigante que dieron los matemáticos en el siglo XIX cuando decidieron usar las aplicaciones biyectivas para comparar el tamaño de dos

conjuntos. Fueron varios los matemáticos implicados en esta labor, pero a Cantor se debió el empujón definitivo que permitió esta revolución. Aunque se echa en falta algún acercamiento a las ideas de infinito surgidas en civilizaciones no occidentales, este libro resulta una introducción tan amena como interesante al infinito matemático.

Antonio Morales Campoy
Universidad de Almería

Acertijos

25 lingotes de oro

Todos son idénticos, salvo uno, que pesa algo menos. La diferencia no es detectable a simple vista. Nos preguntamos si es posible localizar el lingote defectuoso con un máximo de tres pesadas en una balanza.

(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

Como se recordará, en el número anterior habíamos supuesto que un individuo M se dirigía hacia la estrella *Próxima Centauri*, situada a unos 4,25 años luz de la Tierra, al 99 por ciento de la velocidad de la luz ($v = 0,99c$) con respecto a otro individuo R. Se quería conocer:

1. El tiempo, según el individuo R, que invierte M en alcanzar la estrella.
2. El tiempo transcurrido, según la medición del propio M, hasta llegar a *Próxima Centauri*.
3. La distancia recorrida por M según sus propias mediciones.

Según R, el individuo M recorre una distancia de 4,25 años luz al 99 por ciento de la velocidad de la luz. Por tanto,

$$t_R = \frac{4,25}{0,99} \approx 4,29 \text{ años.}$$

En cambio, el tiempo, según la medición del propio M, viene dado como sigue:

$$t_M = t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx t_R 0,14 \approx 0,6 \text{ años,}$$

es decir, unos 7 meses y 6 días.

La distancia recorrida, según las mediciones de M, sería la siguiente:

$$0,6 \cdot 0,99 = 0,594 \text{ años luz.}$$

Juan Carlos Navarro Pascual
Universidad de Almería

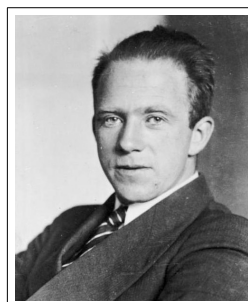
Citas Matemáticas

«La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando».



Gottfried W. Leibniz (1646–1716),
matemático y filósofo alemán.

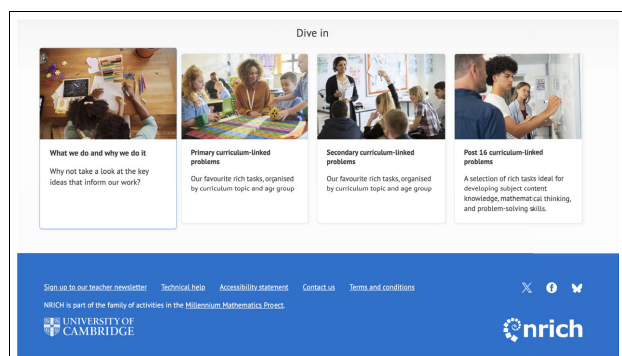
«Creo que la física moderna se ha pronunciado definitivamente a favor de Platón. De hecho, las unidades más pequeñas de la materia no son objetos físicos en el sentido habitual; son formas e ideas que solo pueden expresarse sin ambigüedad mediante el lenguaje matemático».



Werner Heisenberg (1901–1976),
físico alemán.

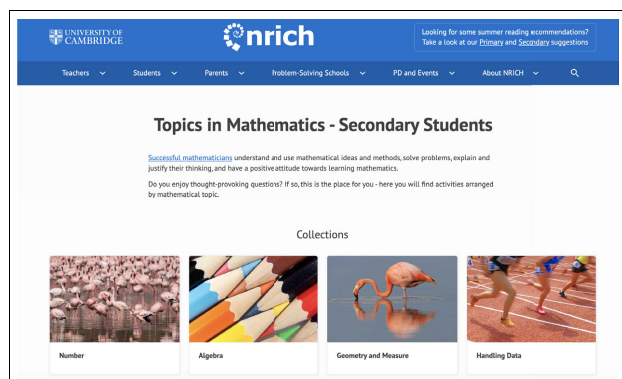
Páginas web y redes sociales

NRICH MATH



Página principal de NRICH MATH

El portal NRICH MATH (nrich.maths.org), está desarrollado por miembros de las facultades de Matemáticas y Educación de la *Universidad de Cambridge*. Es un proyecto creado con el propósito fundamental de enriquecer la enseñanza matemática y fomentar el pensamiento razonado, curioso y persistente que surgió en el marco del *Millennium Mathematics Project*.



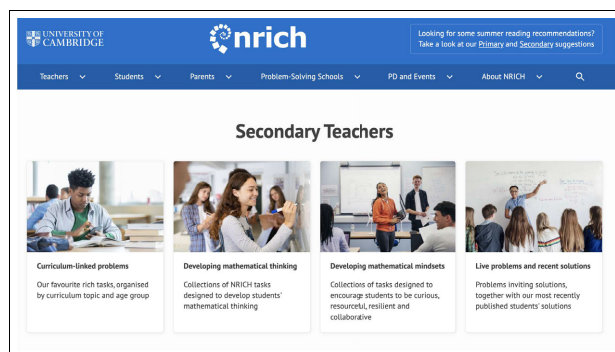
Su meta principal es ir más allá del mero entrenamiento memorístico, ofreciendo problemas abiertos que desafían la creatividad del alumnado. Para docentes y estudiantado de educación secundaria, supone un recurso ex-

traordinario y gratuito con el que complementar el currículo oficial y enriquecer la dinámica de las aulas.

Entre sus propuestas destacan sus retos y problemas estructurados por niveles (Secondary Stage 3 y 4/Post-16), perfectamente adaptables a la ESO y Bachillerato.

La plataforma organiza sus recursos en secciones muy claras: «Students», donde el alumnado encuentra desafíos interactivos, juegos de estrategia y problemas del mes cuya solución pueden enviar para ser revisada por el equipo.

«Teachers», un espacio imprescindible para el profesorado que incluye guías pedagógicas, notas metodológicas y secuencias didácticas completas; y «Resources for Professional Development», ideal para visualizar diferentes seminarios web sobre resolución de problemas.



Además, el portal publica novedades periódicas conectadas con temas de actualidad, investigaciones y colecciones temáticas (como geometría visual, razonamiento algebraico o probabilidad) que sirven para inspirar proyectos escolares, olimpiadas matemáticas locales o talleres de refuerzo. NRICH convierte así la resolución de problemas en una experiencia colaborativa y estimulante.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Sashiko

Las matemáticas tras los patrones de bordado

Iván José Ación Martín
Juan Rafael Sánchez Gálvez
Carmen Torres Gutiérrez

Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

El *Sashiko* es una técnica tradicional de bordado japonesa que esconde tras cada puntada un gran significado histórico mezclado con belleza, paciencia y sobre todo matemáticas. La palabra viene del japonés *pequeñas puntadas* aludiendo al acto de bordar verticalmente a través de capas gruesas de tela con una aguja.

Su origen tomó lugar en el periodo EDO (1603–1867) cuando las comunidades rurales debían reforzar y reparar sus ropas debido a la escasez de materiales, dado que coser las líneas paralelas en direcciones cruzadas suponía un uso rápido y eficiente del tiempo, era un medio eficaz para reforzar las prendas y representaba el uso más económico de los materiales. De hecho, los lugares donde se encontraban los diseños solían ser las zonas más desgastadas de las prendas.

El aspecto matemático del Sashiko comienza con la geometría básica de una cuadrícula subyacente de líneas paralelas. Esta cuadrícula, a su vez, determina la forma en que se cosen los diseños. Las líneas paralelas más largas y continuas se cosen antes que las líneas de unión más cortas. Las variaciones son innumerables. Cuantas más direcciones se crucen entre sí las líneas, mayor será el refuerzo de la tela, como muestra la imagen a continuación.



Además, muchos patrones tienen un significado simbólico profundo. Olas, redes, montañas, semillas, flores o formas geométricas representan conceptos como protección, prosperidad, longevidad o conexión con la naturaleza. A continuación expondremos algunas variantes del bordado junto con su explicación matemática.

Una de las técnicas de sashiko más conocidas es el *Hitomezashi*, también conocido como *Shonai Sashiko*, cuyo nombre significa «Sashiko de una sola puntada», se trabaja sobre una cuadrícula y se realiza con una puntada más larga, que cubre una arista completa, formando así figuras geométricas.

Esta sigue un patrón binario, pues cada arista tiene dos posibilidades, pues contiene, o bien una puntada derecha, la cual es visible, o bien una puntada revés, la cual no es visible, pues está al otro lado de la tela. De esta forma denominaremos los dos estados como 1, la puntada derecha, y 0, la puntada revés. Además definimos el complementario de una codificación como aquella codificación en la que intercambiamos el 1 por el 0. Por último denotaremos como v a la codificación de las puntadas verticales, y como w , a la de las puntadas horizontales.

Para este ejemplo consideremos las puntadas verticales, por ser las puntadas de forma que si en una fila una puntada es derecha, la puntada de la misma columna situada en la siguiente fila es reversa y viceversa, basta con codificar una fila, pues la siguiente y la anterior serán la complementaria. En general codificaremos la fila de abajo para las puntadas verticales, empezando de izquierda a derecha, y para las horizontales codificaremos la columna de la izquierda empezando de abajo hacia arriba, pues

la manera de hacer las punzadas es de Suroeste a Noroeste. Por lo que finalmente las puntadas verticales de la Figura quedarán codificadas como $v = 0110011001$. Que para facilitar las cuentas los patrones se representan como un generador, que se repite constantemente, en este caso $v = 0110$.



Definiremos ϵ como el valor nulo, representado cuando no hay puntadas en alguno de los sentido, como es el caso de la figura anterior con las puntadas horizontales, que no han sido añadidas aún. Por lo que tenemos que $w = \epsilon$.

El segundo estilo de bordado más característico del Sashiko es el *Moyōzashi*. Este no se construye necesariamente a partir de una sucesión binaria de puntadas sobre las aristas de una cuadrícula, sino que las puntadas pueden combinarse libremente para formar diversos motivos geométricos. Es por esto que al estudiarlo es más conveniente centrarse en las propias líneas creadas por las puntadas como los elementos principales del patrón.

Podemos imaginar el tejido como un plano cartesiano en el que cada puntada se asocia a un segmento que une dos puntos. Si denotamos $P_i = (x_i, y_i)$ y $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ dos puntos consecutivos de una línea bordada, la puntada correspondiente puede representarse mediante el segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$.

Su longitud viene dada por $d(P_i, P_{i+1}) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. De esta forma, una línea del patrón puede interpretarse como una sucesión de segmentos consecutivos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$. Esta representación permite estudiar algunas de las propiedades geométricas que determinan la regularidad del bordado.

En particular, cuando las puntadas tienen longitudes iguales, podemos considerar $d(P_i, P_{i+1}) = d$ para todo i . La sucesión de puntos constituye entonces una discretización de la línea que define el motivo geométrico.

Una segunda característica fundamental del *Moyōzashi* es la repetición de determinados motivos. Si M representa un motivo elemental del patrón, se pueden realizar traslaciones para obtener copias del mismo. Una traslación horizontal se puede expresar como una aplicación

T dada por $T(x, y) = (x + a, y)$, y una vertical como $S(x, y) = (x, y + b)$.



Aplicando sucesivamente estas transformaciones obtenemos $M, T(M), T^2(M), \dots$ y, en el caso de una repetición en dos direcciones, $T^i S^j(M), i, j \in \mathbb{Z}$. Así, un patrón que a primera vista puede parecer complejo puede ser entendido como la repetición de una unidad geométrica fundamental.

Estas transformaciones permiten describir matemáticamente la construcción de muchos de los motivos tradi-

cionales del *Moyōzashi*. En particular, determinados patrones pueden descomponerse en familias de líneas paralelas que, al intersectarse, generan diferentes polígonos. Por tanto, podemos pasar de considerar las puntadas individualmente a estudiar la estructura global formada por sus intersecciones y simetrías.

Un ejemplo especialmente representativo es el patrón *Asanoha*, cuyo diseño está basado en una estructura geométrica de líneas que genera formas hexagonales y estrellas de seis puntas. En este caso, la complejidad visual del motivo puede entenderse como el resultado de la combinación de un número reducido de direcciones y de su repetición periódica sobre el tejido. De esta manera, conceptos elementales como paralelismo, ángulos, simetría, traslación y periodicidad permiten describir matemáticamente una estructura que visualmente parece considerablemente más compleja.

Referencias

- [1] Arai L. (2006). Sashiko Workshop: Experiential Geometry¹².
- [2] Seaton K. y Hayes C. (2023). Mathematical specification of hitomezashi designs. arxiv.org/pdf/2208.

Responsables de las secciones

❖ ACTIVIDAD MATEMÁTICA

- *Actividades organizadas*: Yolanda del Águila del Águila (yaguila@ual.es) y Helena Martínez Puertas (hmartinez@ual.es).
- *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Cristina Rodríguez Perales (crp170@ual.es).

❖ ENSEÑANZA PRIMARIA E INFANTIL

- *Experiencias docentes*: Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez (climent@ddcc.uhu.es) e Isabel María Romero Albadalejo (imromero@ual.es).

❖ ENSEÑANZA SECUNDARIA

- *Experiencias docentes*: José Manuel Bonillo Viciano (josebonillomat@gmail.com), David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Pilar Gámez Gámez (mpgamez75@gmail.com) y María del Mar Llobregat Requena (mmar.llobregat@sek.es).
- *Enseñanza bilingüe*: Daniel Prados Torrecillas (plurilinguismo.dp.al.ced@juntadeandalucia.es).

- *Concurso de problemas*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnave@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).

❖ DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- *La historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorrecci@ual.es).
- *Las matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Antonio García Jerez (agarcia-jerez@ual.es) y Ana Devaki Maldonado González (amg457@ual.es).
- *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
- *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López

12. digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1319&context=tsaconf.

(jescoriz@ual.es).

- *Citas matemáticas*: Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgrozas@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).

- *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnave@ual.es).

• TERRITORIO ESTUDIANTE: Iván José Acién Martín (ivanacien.tecno18@gmail.com), Juan Rafael Sánchez Gálvez (jrsangal@gmail.com) y Carmen Torres Gutiérrez (arusuke73.kun@gmail.com).

Aviso legal

Las opiniones expresadas en esta revista son las de los autores, y no representan necesariamente las del equipo editorial del *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*.

Los derechos de copyright de los artículos publicados pertenecen al *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*. Cualquier persona física o jurídica que desee utilizar una parte o la totalidad de algún artículo, podrá hacerlo citando la fuente de referencia y su autor o autores.